

Глава II

ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ МАТРИЦЫ, ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

§ 1. Введение

Как только мы покидаем хорошо пропаханные поля действительных и комплексных чисел и оказываемся в сравнительно мало исследованных областях гиперкомплексных чисел, перед нами открываются многочисленные возможности введения упорядочивающих соотношений. В этой главе мы рассмотрим несколько интересных классов неравенств, относящихся к матрицам. Как мы увидим, основное понятие положительного числа может быть распространено на матрицы разными содержательными путями.

Самым простым и наиболее непосредственным из них является понятие *положительно определенной* матрицы. Мы начнем с того, что сосредоточим наше внимание на характеристических числах матриц этого типа и на некоторых функциях характеристических чисел. Самой интересной такой функцией является произведение характеристических чисел, *опредетель* матрицы.

Из всех путей, которые ведут к нашей цели, т. е. к изучению свойств определителя, мы выберем тот, который основан на интегральных представлениях определителя. После того как мы получим некоторые результаты из элементарных представлений соответствующих положительно определенных форм в виде суммы квадратов, мы перейдем к более тонким результатам, получающимся из интегральных представлений определителя, принадлежащих Ингаму и Зигелю, и из их обобщений, принадлежащих Беллману и Олкину.

Для того чтобы получить соответствующие результаты для положительно определенных *эрмитовых* матриц, мы выведем новое тождество для определителя эрмитовой матрицы. Это представление даст нам возможность дока-

зять ряд результатов для таких матриц методами, пригодными и для симметричных матриц.

Некоторые из этих результатов принадлежат Фань Цзы, который получил их, основываясь на вариационных формулах, обобщающих классическое минимакс-определение Фишера характеристических чисел. Это — еще один мощный метод, заслуживающий систематической разработки.

Перейдя к изучению положительно определенных матриц, мы далее рассмотрим *положительные матрицы* — класс матриц, введенный Перроном и подробно исследованный Фробениусом. В последние годы эти матрицы приобрели выдающееся значение в связи с изучением вычислительных алгоритмов для численного решения уравнений с частными производными, встречающихся в разветвляющихся процессах, в теории игр и линейного программирования и в математической экономике.

В случае положительных матриц мы получим вариационное определение наибольшего по абсолютной величине характеристического числа, которое оказывается действительным. Полученное таким образом представление даст нам возможность доказать интересную теорему о поведении этого характеристического числа как функции от матрицы.

Теория положительных матриц является лишь близкой к поверхности разработкой двух исключительно богатых жил: теории *положительных операторов* и теории *преобразований, понижающих число перемен знака*. Мы сможем сделать только несколько небольших замечаний по поводу этих теорий, в которых так много было сделано Гантмахером, Крейном, Шенбергом, Карлином, Мак-Грегором и др. Эти две теории заслуживают специальных монографий.

Помимо понятия положительности, существует еще понятие *области положительности*, введенное Кехером, и связанное с интегралом Ингама и Зигеля, а также понятие *положительных преобразований* Лёвнера. Эти понятия играют большую роль в дисперсионной теории в квантовой механике, а также в анализе линейных электрических сетей.

Мы коротко остановимся на недавних результатах Лакса, относящихся к классу матриц, важных для теории гиперболических уравнений с частными производными.