ГЛАВА VI

ИНТЕГРАЛЫ

6.1. Предварительные замечания об интегралах Лебега. Интегралы, рассматриваемые в настоящей главе, — это интегралы Лебега; только в §§ 6.15—6.22 мы будем иметь дело с интегралами Стилтьеса. Здесь уместно указать, какие сведения из теории интегрирования предполагаются известными. Как правило, они очень невелики. Читателю, обычно, достаточно знать, что существует *некоторое* определение интеграла, которое обладает свойствами, перечисленными ниже. Многие из наших теорем сохраняют смысл и остаются справедливыми и при более старых определениях интеграла; однако рассмотрения становятся *легче* и в то же время более полными, если мы будем основываться на определении интеграла достаточной общности.

Мы предполагаем известным понятие *измеримого множества*, как правило, линейного, но иногда и нескольких измерений. Рассматриваемые нами множества могут быть ограниченными или неограниченными. Определение меры применимо в первую очередь к ограниченным множествам; неограниченное же множество считается измеримым, если каждая ограниченная часть его измерима, и за его меру принимается верхняя грань мер всех его ограниченных частей *).

Мы будем без оговорок предполагать, что каждое рассматриваемое нами множество E измеримо. Мы обозначаем меру E через mE, а когда это не может вызвать недоразумений, то и просто через E. Когда E неограничено, mE может быть бесконечностью

Мы также предполагаем, что читатель знаком с понятием *измеримой функции*. Суммы, произведения и пределы измеримых функций измеримы. Все функции, определяемые обычными процессами анализа, измеримы, и мы ограничимся рассмотрением только измеримых функций; мы не будем, как правило, каждый раз повторять, что рассматриваемые нами функции предполагаются измеримыми.

Далее, мы предполагаем у читателя знакомство с определением интеграла от ограниченной или неограниченной функции

*) Здесь под ограниченной частью множества понимается его общая часть с некоторой конечной сферой. *(Прим. перев.)*

по (ограниченному или неограниченному) интервалу, или по измеримому множеству. Ограниченная измеримая функция интегрируема по любому ограниченному измеримому множеству. Мы называем класс (ограниченных или неограниченных) функций, интегрируемых в (ограниченном или неограниченном) интервале, или на множестве E, классом L или, если нужно подчеркнуть множество, по которому берется интеграл, классом $L(E)$. Если f принадлежит к L, то мы пишем $f \in L$.

Если $f = 1$, то $\int\limits_E f dx = mE$.

Если $f \in L$, то $|f| \in L$.

Если f^+ и f^- — функции, равные f, когда f, соответственно, положительна или отрицательна, и равные нулю в остальных случаях, так что

$f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \min(f, 0)$, $f = f^+ + f^-$, $|f| = f^+ - f^-$,

и если $f \in L$, то $f^+ \in L$ и $f^- \in L$ и [1]

$$\int f dx = \int f^+ dx + \int f^- dx, \quad \int |f| dx = \int f^+ dx - \int f^- dx.$$

Если $f \geqslant 0$ и $(f)_n = \min(f, n)$, то (по определению)

$$\int f dx = \lim_{n \to \infty} \int (f)_n dx.$$

Если $f \in L$ и (g измерима и) $|g| < C|f|$, то $g \in L$.

Если $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L$, то

$$\int (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n) dx =$$
$$= a_1 \int f_1 dx + a_2 \int f_2 dx + \ldots + a_n \int f_n dx.$$

Если $p > 0$ и (f измерима и) $|f|^p \in L$, то мы говорим, что f принадлежит к классу L^p, и пишем $f \in L^p$. Эти классы особенно важны при $p \geqslant 1$. Класс L^1 совпадает с L.

Если интегрирование производится по конечному интервалу (или по ограниченному множеству), то класс L^p содержит каждый

[1] Мы приводим результаты, относящиеся к функциям одного переменного, и не указываем те множества, по которым производится интегрирование.

класс L^q с $q > p$; $f \in L^q$ влечет $f \in L^p$. Ограниченная функция принадлежит к каждому L^q. Эти предложения не имеют места для бесконечных интервалов: f может принадлежать к L^p $(0, \infty)$ для единственного значения p.

Если интервал конечен и $f \in L^q$, $p < q$, то $|f|^p < 1 + |f|^q$, так что $f \in L^p$.

Если рассматриваемый интервал есть $(0, a)$, где $a < 1$, то (1) $x^{-1/p} \in L^{p-\delta}$ для любого $\delta > 0$, но не принадлежит к L^p; (2) $x^{-1/p}\left(\log \frac{1}{x}\right)^{-2/p} \in L^p$, но не принадлежит к $L^{p+\delta}$; (3) $\log \frac{1}{x} \in L^p$ для любого p; и (4) $e^{1/x}$ не принадлежит ни к какому L^p. Если мы имеем дело с интервалом $(0, \infty)$, то $x^{-1/2}(1 + |\log x|)^{-1} \in L^2$, но не принадлежит ни к какому другому L^p.

6.2. Замечания о нулевых множествах и нулевых функциях. Множество меры нуль называется *нулевым множеством*. В теории интегрирования мы можем пренебрегать нулевыми множествами. Если $f = g$, за исключением точек, составляющих нулевое множество, то мы говорим, что f и g *эквивалентны*, и пишем $f \equiv g$. Эквивалентные функции имеют равные интегралы (если они вообще интегрируемы).

Если $f \equiv 0$, то мы говорим, что f есть *нулевая функция*.

Аналогично мы определяем понятия: „функции, эквивалентные на E“, „функция, нулевая на E“. Вообще мы не будем отмечать множество E, если все ясно из контекста, как, например, если мы рассматриваем интегралы, распространенные по E.

Если все x, кроме x, принадлежащих некоторому нулевому множеству, обладают каким-либо свойством $p(x)$, то мы говорим, что *почти все* x обладают свойством $p(x)$, или что $p(x)$ имеет место для *почти всех* x, или *почти всюду*. Так, нулевая функция почти всюду равна нулю.

Обычно мы предполагаем, что наши функции $f, g, \ldots$ почти всюду конечны; но в некоторых случаях мы должны будем рассматривать функции, бесконечные на множестве положительной меры. Так, если f неотрицательна, равна нулю на множестве E положительной меры, и $r < 0$, то мы должны рассматривать f^r на E как бесконечность и $\int f^r dx$ как имеющий значение ∞.