Analyse 2

Notes de cours

André Giroux
Département de Mathématiques et Statistique
Université de Montréal
Avril 2004

Table des matières

Table des figures

1 INTRODUCTION

L'analyse mathématique est l'étude approfondie du calcul différentiel et intégral. Ce cours porte sur le calcul intégral. Il se divise en trois parties. La première présente la définition et les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue d'une variable réelle. La seconde utilise cet outil pour introduire les fonctions analytiques élémentaires (les fonctions logarithmique, exponentielle, trigonométriques directes et inverses, eulériennes). La dernière, enfin, porte sur la représentation de ces fonctions par des séries de Taylor et des séries de Fourier.

Il s'agit d'un cours de mathématique formel, avec des démonstrations rigoureuses et complètes de tous les théorèmes présentés. Les exercices proposés sont de même nature et exigent de l'étudiant qu'il en compose des solutions rigoureuses et complètes. Ce cours est un deuxième cours d'analyse et suppose que l'étudiant connaît déjà les propriétés des fonctions continues ainsi que celles des fonctions dérivables. Rappelons quelques-unes de ces propriétés.

On note $[a, b]$ un intervalle **compact** (c'est-à-dire fermé borné),

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\},$$

$]a, b[$ un intervalle **ouvert**,

$$]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$$

et (a, b) un intervalle quelconque. (Ces notations présument que $a \leq b$). Un intervalle compact peut être caractérisé par la propriété suivante :

- Toute suite $\{x_n\}_{n \geq 1}$ de points de $[a, b]$ contient une suite partielle $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$ qui converge vers un point de $[a, b]$ (théorème de Bolzano-Weierstrass).

Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction. Elle est dite **continue** sur (a, b) si elle est continue en chaque point x_0 de (a, b), c'est-à-dire si en chaque point x_0 de (a, b),

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Un fonction continue jouit des propriétés suivantes :

- L'image d'un intervalle quelconque par une fonction continue est un intervalle (propriété des valeurs intermédiaires).
- L'image d'un intervalle compact par une fonction continue est un intervalle compact (propriété des valeurs extrêmes).

Une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle y admet une fonction inverse f^{-1} qui est elle aussi continue et strictement monotone.

Exemple.

Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ est définie et continue pour $x \geq 0$ si n est pair et pour tout x si n est impair.

La fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est dite **dérivable** sur (a, b) si elle est dérivable en chaque point x_0 de (a, b), c'est-à-dire si en chaque point x_0 de (a, b), la limite suivante

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. On écrit alors

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La fonction f est dite **continûment dérivable** si sa dérivée f' est continue.

Le théorème fondamental du calcul différentiel est le **théorème des accroissements finis** (quelquefois appelé théorème de la moyenne ou encore théorème de Rolle lorsque $f(a) = f(b) = 0$) :

- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

L'inverse d'une fonction dérivable est dérivable aux points y correspondant aux points x où $f'(x) \neq 0$ ($y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$) et alors

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Exemple.

Un polynôme de degré n,

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

est dérivable sur tout l'axe réel et

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

Une fonction rationnelle,

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

est dérivable aux points où elle est définie (c'est-à-dire aux points où le dénominateur $Q_m(x)$ ne s'annule pas) et

$$R'(x) = \frac{P_n'(x)Q_m(x) - P_n(x)Q_m'(x)}{Q_m^2(x)}.$$

Si $p \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{d}{dx}x^p = p\,x^{p-1} \ ,\ x > 0.$$

1.1 Exercices 1

Justifier complètement toutes ses affirmations.

1. Vérifier que la suite de points de $[-1, 1]$ définie par

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n n}{1 + n}$$

   ne converge pas. En exhiber une suite partielle convergente.

2. Montrer qu'une fonction continue sur un intervalle fermé peut toujours être prolongée à une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Cela reste-t-il vrai pour un intervalle quelconque ?

3. Donner un exemple d'une fonction continue sur un intervalle fermé qui n'y est pas bornée ou qui n'y atteint pas ses bornes. Même question pour un intervalle borné.

4. Montrer qu'une fonction dérivable sur un intervalle fermé peut toujours être prolongée à une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en tous les points de leur domaine de définition :

$$x^{1/2} \ ,\ x^{1/3} \ ,\ x^{3/2} \ ,\ x^{4/3} \ ?$$

6. Soient $0 < a < b$. Déterminer le point c du théorème des accroissements finis pour la fonction $f(x) = x^2$. Même question pour la fonction $f(x) = x^3$.

2 INTÉGRATION DES FONCTIONS CONTINUES

L'intégration des fonctions continues repose sur une propriété supplémentaire de ces fonctions lorsqu'on les considère sur des intervalles compacts.

2.1 La continuité uniforme

Dire d'une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ qu'elle est continue, c'est dire qu'elle est continue en chaque point x_0 de (a, b), c'est-à-dire qu'à chaque point x_0 et à chaque $\epsilon > 0$ correspond $\delta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \delta \text{ et } x \in (a, b) \text{ impliquent } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Le nombre δ dépend à la fois de x_0 et de ϵ :

$$\delta = \delta(x_0, \epsilon).$$

Lorsqu'il peut être choisi indépendamment du point x_0,

$$\delta = \delta(\epsilon),$$

on dit que la fonction est uniformément continue sur l'intervalle (a, b).

En d'autres termes, une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est **uniformément continue** sur (a, b) si à chaque $\epsilon > 0$ correspond $\delta > 0$ tel que

$$|x - y| < \delta \text{ et } x, y \in (a, b) \text{ impliquent } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Exemples.

– La fonction $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ puisque :

$$|x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)| \leq 2|x - y|.$$

– La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$; en vertu du théorème des accroissements finis en effet, il existe z entre x et y tel que :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{2\sqrt{z}} \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

– La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[1, +\infty[$; soient en effet $x_n = (n + 1/n)$ et $y_n = n$. On a toujours

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$$

bien que

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n}.$$

Aucun nombre δ ne peut correspondre à $\epsilon = 2$.

– La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur l'intervalle $[0, 1]$, en vertu du théorème suivant.

Théorème 1 *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle compact y est uniformément continue.*

Démonstration. Supposons que le théorème est faux. Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que, quelque soit $\delta > 0$, on peut trouver deux points x, y de l'intervalle $[a, b]$ pour lesquels :

$$|x - y| < \delta \text{ et } |g(x) - g(y)| > \epsilon.$$

Choisissons successivement $\delta = 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ On obtient deux suites de points x_n et y_n de $[a, b]$ tels que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |g(x_n) - g(y_n)| > \epsilon.$$

Par compacité, la suite $\{x_n\}_{n \geq 1}$ contient une suite partielle $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$ qui converge vers un point z de $[a, b]$. Comme

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k},$$

la suite partielle $\{y_{n_k}\}_{k \geq 1}$ correspondante converge aussi vers z. Par continuité, on a donc

$$\lim_{k \to +\infty} (g(x_{n_k}) - g(y_{n_k})) = g(z) - g(z) = 0$$

ce qui est absurde puisque l'on a toujours

$$|g(x_{n_k}) - g(y_{n_k})| > \epsilon.$$

C.Q.F.D.

2.2 Définition de l'intégrale

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle compact. À chaque partition $\mathcal{P}$ de l'intervalle,

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ où } a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

associons avec Riemann une somme supérieure $S(\mathcal{P}, f)$,

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^{n} \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}(x_k - x_{k-1}),$$

et une somme inférieure $s(\mathcal{P}, f)$,

$$s(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^{n} \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}(x_k - x_{k-1}).$$

Lorsque la fonction est positive, ces sommes majorent et minorent respectivement l'aire déterminée par l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$ et le graphe de la fonction (figure (1) — les points de la partition ne sont pas nécessairement équidistants).

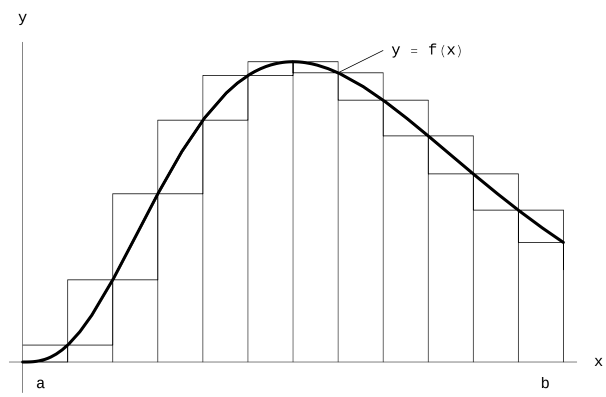

FIG. 1 – Sommes de Riemann

Il est clair que l'on a

$$\inf\{f(x) \mid a \le x \le b\}(b-a) \le s(\mathcal{P}, f) \le S(\mathcal{P}, f) \le \sup\{f(x) \mid a \le x \le b\}(b-a)$$

pour toute partition $\mathcal{P}$. Observons maintenant que, si $\mathcal{Q}$ est une partition plus fine que $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$, on a

$$S(\mathcal{Q}, f) \le S(\mathcal{P}, f) \quad , \quad s(\mathcal{P}, f) \le s(\mathcal{Q}, f). \tag{1}$$

En effet, il suffit de vérifier ces inégalités lorsque $\mathcal{Q}$ s'obtient de $\mathcal{P}$ par adjonction d'un seul point, $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{x*\}$; or si j est l'indice tel que $x_{j-1} < x* < x_j$, on a

$$\begin{aligned} &\sup\{f(x) \mid x_{j-1} \le x \le x_j\}(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sup\{f(x) \mid x_{j-1} \le x \le x_j\}(x_j - x*) + \sup\{f(x) \mid x_{j-1} \le x \le x_j\}(x * - x_{j-1}) \\ &\ge \sup\{f(x) \mid x* \le x \le x_j\}(x_j - x*) + \sup\{f(x) \mid x_{j-1} \le x \le x*\}(x * - x_{j-1}) \end{aligned}$$

et les autres termes de la somme $S(\mathcal{P}, f)$ restent inchangés. De ceci découle la première des inégalités (1). L'autre inégalité s'obtient de façon similaire.

On déduit de ces relations que, quelles que soient les partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on a

$$s(\mathcal{P}, f) \leq s(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}, f) \leq S(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}, f) \leq S(\mathcal{Q}, f),$$

c'est-à-dire que toute somme inférieure est plus petite que toute somme supérieure. Ainsi

$$\sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}, f) \leq \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f).$$

En fait, on a toujours

$$\sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}, f) = \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f). \tag{2}$$

Cela est une conséquence de la continuité uniforme d'une fonction continue sur un intervalle compact. Démontrons la relation (2). Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. Soit $\delta > 0$ un nombre tel que

$$|x - y| < \delta \text{ et } x, y \in [a, b] \text{ impliquent } |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Soit aussi

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

une partition pour laquelle

$$x_k - x_{k-1} < \delta \text{ pour tout } k.$$

Soient enfin $u_k, v_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tels que, pour tout k,

$$f(u_k) = \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}\ ,\ f(v_k) = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

(propriété des valeurs extrêmes). Alors

$$S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\} - \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\})(x_k - x_{k-1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (f(v_k) - f(u_k))(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b - a}(x_k - x_{k-1}) = \epsilon$$

ce qui démontre la relation (2).

On exprime l'équation (2) en disant que la fonction f est **intégrable** sur l'intervalle $[a, b]$, d'intégrale :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}, f) = \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f).$$

Lorsque f est positive, l'intégrale est donc exactement le nombre qui donne l'aire déterminée par l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$ et le graphe de la fonction.

La signification de l'intégrale ayant été bien établie, nous pouvons maintenant donner avec Darboux une façon plus commode de la calculer (figure (2) — les points où la fonction est évaluée ne sont pas nécessairement équidistants).

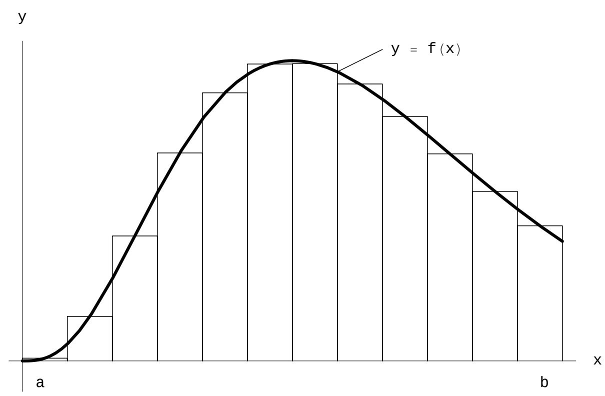

FIG. 2 – Sommes de Darboux

Théorème 2 (Darboux) *Quels que soient les nombres*

$$x_{k,n} \in [a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a)],$$

on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}).$$

Démonstration. Soit

$$\mathcal{P}_n = \{a, a + \frac{1}{n}(b-a), a + \frac{2}{n}(b-a), \ldots, b\}$$

la partition uniforme de $[a, b]$. On a

$$s(\mathcal{P}_n, f) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) \leq S(\mathcal{P}_n, f)$$

et

$$s(\mathcal{P}_n, f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(\mathcal{P}_n, f).$$

Ainsi
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) \right| \leq S(\mathcal{P}_n, f) - s(\mathcal{P}_n, f).$$
Or, en utilisant la continuité uniforme de la fonction f et la propriété des valeurs extrêmes, on voit comme précédemment que

$$\lim_{n\to+\infty} (S(\mathcal{P}_n, f) - s(\mathcal{P}_n, f)) = 0.$$

C.Q.F.D.

Exemple.

On a
$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2.3 Propriétés de l'intégrale

Les trois propriétés essentielles de l'intégrale d'une fonction continue sont la linéarité, la positivité et l'additivité.

Théorème 3 (Linéarité de l'intégrale) *Soient $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ des nombres. Alors*

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\,dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Démonstration. En utilisant les sommes de Darboux-Riemann, on obtient :

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\,dx$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(c_1 f_1 \left(a + \frac{k}{n}(b-a) \right) + c_2 f_2 \left(a + \frac{k}{n}(b-a) \right) \right)$$
$$= c_1 \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f_1 \left(a + \frac{k}{n}(b-a) \right) + c_2 \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f_2 \left(a + \frac{k}{n}(b-a) \right)$$
$$= c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

C.Q.F.D.

Théorème 4 (Positivité de l'intégrale) *Soient $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues telles que*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \text{ pour } a \leq x \leq b.$$

Alors

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Démonstration. En utilisant les sommes de Darboux-Riemann, on obtient :

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f_1\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$
$$\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f_2\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

C.Q.F.D.

L'application de ce théorème aux fonctions $f_1 = \pm f$ et $f_2 = |f|$ conduit à **l'inégalité du triangle** pour les intégrales :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Théorème 5 (Additivité de l'intégrale) *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a < c < b$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. Soient $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ des partitions des intervalles $[a,b]$, $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement. On a donc :

$$\mathcal{P} \cup \{c\} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''.$$

En utilisant les inégalités (1), on voit d'une part que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}, f) \leq \sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P} \cup \{c\}, f) = \sup_{\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''} \left(s(\mathcal{P}', f) + s(\mathcal{P}'', f)\right)$$
$$\leq \sup_{\mathcal{P}'} s(\mathcal{P}', f) + \sup_{\mathcal{P}''} s(\mathcal{P}'', f) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(exercice (11)) et d'autre part que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P},f) \geq \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}\cup\{c\},f) = \inf_{\mathcal{P}'\cup\mathcal{P}''}(S(\mathcal{P}',f)+S(\mathcal{P}'',f))$$
$$\geq \inf_{\mathcal{P}'} S(\mathcal{P}',f) + \inf_{\mathcal{P}''} S(\mathcal{P}'',f) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

C.Q.F.D.

Il commode de poser

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

L'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

est ainsi définie quelle que soit la position relative des bornes d'intégration a et b — mais la propriété de positivité ne vaut que si $a < b$.

Exemple.

Si $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = L.$$

En effet, quelque soit $\epsilon > 0$,

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - L\right| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t)-L)\,dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{x}\int_0^y |f(t)-L|\,dt + \frac{1}{x}\int_y^x |f(t)-L|\,dt$$
$$\leq \frac{y}{x}\sup_{t\geq 0}|f(t)-L| + \frac{x-y}{x}\sup_{t\geq y}|f(t)-L|$$
$$< \frac{y}{x}\sup_{t\geq 0}|f(t)-L| + \frac{x-y}{x}\,\frac{\epsilon}{2}$$

dès que $y = y_\epsilon$ est assez grand puis, y ainsi fixé,

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - L\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

dès que

$$x > \frac{2\,y\,\sup_{t\geq 0}|f(t)-L|}{\epsilon}.$$

2.4 Exercices 2

Justifier complètement toutes ses affirmations.

1. Montrer qu'une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ admettant une dérivée bornée est uniformément continue.
2. En déduire qu'une fonction rationnelle $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ qui est uniformément continue sur $(a, c]$ et sur $[c, b)$ l'est aussi sur (a, b).
4. En déduire que la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction $f(x) = 1/x$ est-elle uniformément continue sur l'intervalle $]0, 1]$? sur l'intervalle $[1, +\infty[$?
6. Les sommes supérieures et les sommes inférieures de Riemann peuvent être calculées pour toute fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mais il n'est plus certain que la fonction soit intégrable, c'est-à-dire que l'équation (2) soit vraie. Considérer avec Dirichlet la fonction indicatrice des nombres rationnels :

$$f(x) = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

   Montrer qu'elle n'est intégrable sur aucun intervalle.
7. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues, alors

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

   (Suggestion : choisir le nombre λ de façon optimale dans l'inégalité :

$$0 \leq \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2\,dx.)$$

8. En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) + g(x))^2\,dx} \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx} + \sqrt{\int_a^b g(x)^2\,dx}.$$

9. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$
(Premier théorème de la moyenne).
10. Soit $f : [a, b] \to [0, +\infty[$ une fonction continue et positive telle que
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$
Montrer qu'elle est identiquement nulle.
11. Vérifier les relations suivantes :
$$\sup_{a\in A,\, b\in B}(a+b) \leq \sup_{a\in A} a \ + \sup_{b\in B} b,$$
$$\inf_{a\in A,\, b\in B}(a+b) \geq \inf_{a\in A} a \ + \inf_{b\in B} b.$$
12. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\{a_n\}_{n\geq 1}$ une suite de nombres convergeant vers a, $a_n > a$. Montrer que
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^b f(x)\,dx.$$

3 THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL

Le théorème fondamental du calcul constitue la façon habituelle d'évaluer une intégrale. Il en fait aussi apparaître des propriétés supplémentaires.

3.1 Le théorème fondamental du calcul

Faisant le lien entre le calcul différentiel et le calcul intégral en montrant que la dérivation et l'intégration sont les opérations inverses l'une de l'autre, le théorème fondamental du calcul a deux facettes.

Théorème 6 (Théorème fondamental du calcul I) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $x \in [a, b]$,*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Démonstration. Posons

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Soient $a < x < b$ et $h > 0$ assez petit pour que les points $x \pm h$ soient dans $[a, b]$. On a, en vertu des propriétés de linéarité et d'additivité de l'intégrale, que

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt$$

et que

$$\frac{I(x-h) - I(x)}{-h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} (f(t) - f(x))\,dt$$

de telle sorte que, en vertu cette fois de la positivité,

$$\left|\frac{I(x+h) - I(x)}{h} - f(x)\right| \leq \sup\{|f(t) - f(x)| \mid x \leq t \leq x + h\}$$

et que

$$\left|\frac{I(x-h) - I(x)}{-h} - f(x)\right| \leq \sup\{|f(t) - f(x)| \mid x - h \leq t \leq x\}.$$

En utilisant la continuité de la fonction f au point x, on voit donc que

$$\lim_{h\to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} = f(x).$$

Les cas où $x = a$ et où $x = b$ sont similaires. C.Q.F.D.

Remarque.

Puisque

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt,$$

on a aussi

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x).$$

Théorème 7 (Théorème fondamental du calcul II) *Soit* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continûment dérivable. Alors*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$J(x) = \int_a^x F'(t)\,dt.$$

En vertu du théorème précédent, on a

$$J'(x) = F'(x).$$

Les fonction $J(x)$ et $F(x) - F(a)$ admettent donc la même dérivée sur l'intervalle $[a,b]$. Comme elles s'annulent toutes les deux pour $x = a$, elles coïncident partout sur l'intervalle $[a,b]$:

$$J(b) = F(b) - F(a).$$

C.Q.F.D.

En vertu de ce théorème, il suffit donc, pour évaluer

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

de trouver une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$. On a alors tout simplement

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(Pour abréger l'écriture, on écrit

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.\ )$$

Une telle fonction F se nomme **primitive** de f (puisque que f est sa dérivée) ou encore **intégrale indéfinie** de f. On la dénote par

$$\int f(x)\,dx.$$

En d'autres mots,

$$F(x) = \int f(x)\,dx \;\Leftrightarrow\; F'(x) = f(x).$$

Une primitive n'est définie qu'à l'addition d'une constante près.

Toute fonction continue f admet une primitive, nommément la fonction définie par l'équation

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

(en vertu du théorème (6)) mais si cela s'avère être la seule représentation disponible de F, elle n'est guère utile pour évaluer l'intégrale « définie » de f. Cette situation se présente cependant quelquefois. Et, en règle générale, le calcul des primitives est beaucoup plus difficile que le calcul des dérivées.

Exemple.
Si $p \in \mathbb{Q},\ p \neq -1$,

$$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}$$

puisque

$$\frac{d}{dx}x^{p+1} = (p+1)x^p.$$

On a donc, si $0 < a < b$,

$$\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

3.2 Propriétés supplémentaires de l'intégrale

Le théorème fondamental du calcul met en lumière deux autres propriétés de l'intégrale : l'intégration par parties qui correspond à la règle de dérivation d'un produit et la formule de changement de variable qui correspond à la règle de dérivation en chaîne (exercice (7)).