

# Lecture Notes in Mathematics

Edited by A Dold and B Eckmann

567

Séminaire Bourbaki  
vol. 1975/76  
Exposés 471-488



Springer-Verlag  
Berlin · Heidelberg · New York 1977

---

AMS Subject Classifications (1970): 20G05, 20G25, 22E50, 32L05, 34B25, 14F35, 57D50, 02K35, 12A50, 80A10, 20E99, 55A35, 22E40, 20G30, 33A75, 13C05, 55A25, 20G40, 14F20, 22D10, 22D20, 10F35

---

ISBN 3-540-08064-3 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York  
ISBN 0-387-08064-3 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, re-printing, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by N. Bourbaki 1977

Printed in Germany.

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.

TABLE DES MATIÈRES

15, 16, 17 novembre 1975

471	CARTIER, Pierre	Les représentations des groupes réductifs $p$ -adiques et leurs caractères .....	1
472	LEMAIRE, J. M.	Le transfert dans les espaces fibrés [d'après J. Becker et D. Gottlieb] .....	23
473	LE POTIER, Joseph	Fibrés vectoriels et cycles d'ordre fini sur une variété algébrique non compacte [d'après M. Cornalba et P. Griffiths] .....	38
474	McKEAN, Henry P. et VAN MOERBEKE, Pierre	Sur le spectre de quelques opérateurs et les variétés de Jacobi .....	54
475	MORGAN, John W.	The rational homotopy theory of smooth, complex projective varieties [following Deligne, Griffiths, Morgan and Sullivan] .....	69
476	ROSENBERG, Harold	Les difféomorphismes du cercle [d'après M. R. Herman] .....	81

14, 15, 16 février 1976

477	DELIGNE, Pierre	Les difféomorphismes du cercle [d'après M. R. Herman]	99
478	GRIGORIEFF, Serge	Détermination des jeux boréliens et problèmes logiques associés [d'après D. Martin] .....	122
479	POITOU, Georges	Minorations de discriminants [d'après A. M. Odlyzko] .	136
480	RUELLE, David	Formalisme thermodynamique .....	154
481	STALLINGS, John	Coherence of $\mathbb{Z}$ -manifold fundamental groups .....	167
482	TITS, Jacques	Travaux de Margulis sur les sous-groupes discrets de groupes de Lie .....	174

19, 20, 21 juin 1976

483	DEMAZURE, Michel	Identités de Macdonald .....	191
484	FERRAND, Daniel	Les modules projectifs de type fini sur un anneau de polynômes sur un corps sont libres [d'après Quillen [11] et Suslin [16]] .....	202
485	GRAMAIN, André	Rapport sur la théorie classique des noeuds (1ère partie) .....	222
486	GUICHARDET, Alain	Représentations de $G^X$ selon Gelfand et Delorme	238
487	SERRE, Jean-Pierre	Représentations linéaires des groupes finis "algébriques" [d'après Deligne-Lusztig] .....	256
488	WALDSCHMIDT, Michel	Les travaux de G. V. Čudnovskiĭ sur les nombres transcendants .....	274
	Table par noms d'auteurs .....		293

LES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES RÉDUCTIFS  
P-ADIQUES ET LEURS CARACTÈRES

par Pierre CARTIER

Introduction

Commençons par indiquer certains traits saillants de la théorie des représentations dans le cas réel ; cette dernière est toute entière l'oeuvre de Harish-Chandra (voir le rapport de Varadarajan [25]).

Soit  $G$  un groupe algébrique réel, supposé réductif, et soit  $(\pi, \mathcal{H})$  une représentation unitaire irréductible de  $G$ . Cette représentation admet un caractère  $\Theta_\pi$  qui jouit des propriétés suivantes :

a)  $\Theta_\pi$  est une fonction localement intégrable sur  $G$ , analytique sur l'ensemble  $G'$  des points réguliers de  $G$ .

b) Soit  $D$  la fonction bien connue telle que  $G'$  soit l'ensemble des points de  $G$  où  $D$  ne s'annule pas (voir n° 5.1). Alors  $|D|^{1/2} \Theta_\pi$  est localement bornée sur  $G$ .

c) Soit  $f$  une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur  $G$ . L'opérateur  $\pi(f) = \int_G f(x) \pi(x) dx$  dans  $\mathcal{H}$  est alors nucléaire, et l'on a

$$(1) \quad \text{Tr}(\pi(f)) = \int_G f(x) \Theta_\pi(x) dx .$$

Pour démontrer les résultats précédents, on commence par prouver que si  $K$  est un sous-groupe compact maximal de  $G$ , il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $\pi$ , telle que

$$(2) \quad (\pi : \mathfrak{b}) \leq C \cdot \text{deg } \mathfrak{b}$$

pour toute représentation unitaire irréductible  $\mathfrak{b}$  de  $K$  ; on a noté  $(\pi : \mathfrak{b})$  la multiplicité de  $\mathfrak{b}$  dans la restriction de  $\pi$  à  $K$ . On en déduit facilement (cf. par exemple mon exposé de l'année dernière [4]) que  $\pi(f)$  est nucléaire sous les hypothèses de c) ci-dessus. Il existe alors une distribution  $\Theta_\pi$  sur  $G$  définie par

471-02

$$(3) \quad \Theta_{\pi}(f) = \text{Tr}(\pi(f))$$

et il s'agit de prouver que  $\Theta_{\pi}$  est une fonction.

Pour cela, on définit, dans un voisinage de 0 dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ , une distribution  $\Theta_{\pi}$  par la formule symbolique

$$(4) \quad \Theta_{\pi}(\exp X) = |\det h(\text{ad } X)|^{-\frac{1}{2}} \Theta_{\pi}(X)$$

(en posant  $h(t) = \frac{2}{t} \text{sh} \frac{t}{2}$ ). On montre alors que  $\Theta_{\pi}$  est distribution propre de tous les opérateurs différentiels sur  $\mathfrak{g}$ , invariants par les translations de  $\mathfrak{g}$  et le groupe adjoint de  $G$ . On peut alors utiliser la transformation de Fourier sur  $\mathfrak{g}$ , et l'on est ramené à étudier la transformée de Fourier de la mesure invariante portée par une orbite de  $\text{Ad } G$  dans  $\mathfrak{g}$ . On en déduit le comportement de  $\Theta_{\pi}$  au voisinage de l'origine. Pour étudier  $\Theta_{\pi}$  au voisinage d'un point semi-simple  $x$ , on se ramène à l'étude de distributions sur le centralisateur  $M$  de  $x$  dans  $G$  (voir n° 5.3, formule (31)).

Harish-Chandra s'est consacré depuis quelques années à la tâche de transposer les résultats précédents au cas des groupes  $p$ -adiques (voir son grand rapport [10] de 1972). Dans son cours de 1969, rédigé par van Dijk [11], il n'avait réussi à remplir assez complètement ce programme que dans le cas des représentations de carré intégrable. Il s'était contenté de conjecturer une inégalité analogue à (2) et en avait indiqué quelques conséquences pour le cas général. En 1972, R. Howe [13] a obtenu<sup>1</sup> des résultats à peu près complets pour le cas du groupe linéaire  $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ , basés sur un lemme très astucieux, qu'on retrouvera plus loin (voir § 4) sous une forme généralisée. Le lemme de R. Howe, étendu à tous les groupes réductifs  $p$ -adiques, a permis à Harish-Chandra de démontrer l'existence de caractères avec toutes les propriétés requises. Pour l'instant, l'utilisation intensive de l'algèbre de Lie et de l'exponentielle oblige à se limiter au cas des groupes sur un corps de caractéristique 0. Cependant, une note récente de I. N. Bernshtein [1] donne une démonstration simple, et valable en toutes caractéristiques, d'une inégalité analogue à (2). Nous l'avons suivie au § 2.

Cet exposé est une compilation, presque sans démonstrations, de résultats de R. Howe, I. N. Bernshtein, Jacquet et surtout Harish-Chandra. Ce dernier a exposé ses trouvailles dans plusieurs séries de conférences à Princeton (de novembre 1973 à avril 1974), dont je fus l'un des trop rares auditeurs. J'ai utilisé

<sup>1</sup> Voir aussi [6'], [7'] et [8'].

pour cet exposé mes notes prises lors de ces conférences, ainsi que des lettres, notes privées, etc... mises généreusement à ma disposition par Harish-Chandra. Je ne saurais trop le remercier de son amicale confiance.

## § 1. Généralités sur les groupes p-adiques

### 1.1 Groupes réductifs et sous-groupes paraboliques [2]

On note  $F$  un corps local,  $\mathfrak{o}$  l'anneau des entiers de  $F$ ,  $\mathfrak{p}$  l'idéal maximal de  $\mathfrak{o}$ ,  $\mathfrak{P}$  un générateur de  $\mathfrak{p}$ ,  $q$  l'ordre du corps résiduel  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ , et  $|x|$  la valeur absolue d'un élément  $x$  de  $F$ , normalisée par  $|\mathfrak{P}| = q^{-1}$ . On note aussi  $\bar{F}$  une clôture algébrique de  $F$ .

Soit  $G$  un groupe algébrique, réductif et connexe, défini sur le corps  $F$ . Pour tout sous-groupe algébrique  $H$  de  $G$  (défini sur  $F$ ), on note  $H$  le groupe "abstrait"  $H(F)$  formé des points de  $H$  rationnels sur  $F$ . Le centre de  $G$  est un tore, qui contient un plus grand sous-tore déployé  $Z$ . Tout tore déployé maximal de  $G$  contient  $Z$ ; ces tores sont conjugués par des éléments de  $G$  et leur dimension commune s'appelle le rang déployé de  $G$ . La dimension commune des tores maximaux de  $G$ , qui sont conjugués par le groupe  $G(\bar{F})$ , s'appelle le rang de  $G$ ; on note  $\ell$  ce rang.

On dit qu'un sous-groupe algébrique  $P$  de  $G$  est parabolique si la variété algébrique  $G/P$  est propre (d'aucuns disent : complète). Soit  $N$  le radical unipotent de  $P$ , c'est-à-dire le plus grand sous-groupe algébrique unipotent distingué dans  $P$ . Il existe alors un sous-groupe algébrique réductif connexe  $M$  de  $G$  tel que  $P$  soit le produit semi-direct  $M.N$  (décomposition de Levi de  $P$ ). Soit  $A$  le plus grand sous-tore déployé du centre de  $M$ ; inversement,  $M$  est le centralisateur de  $A$  dans  $G$ . On dit dans ces conditions que  $(P, A)$  est une paire parabolique; lorsque  $P$  est donné,  $A$  est défini à automorphisme intérieur près par un élément de  $N$ . La dimension de  $A$  s'appelle le rang parabolique de  $P$ . On dit que la paire parabolique  $(P, A)$  domine la paire parabolique  $(P', A')$  si  $P \supset P'$  et  $A \subset A'$ ; s'il en est ainsi, il existe un sous-groupe parabolique  $P_1$  de  $M$  tel que  $P' = P_1.N$  et  $(P_1, A')$  est une paire parabolique dans  $M$ . Ce résultat est très utilisé dans les démonstrations par récurrence sur le rang déployé de  $G/Z$ .

471-04

1.2 Structure des groupes p-adiques [3]

Le corps  $F$  est localement compact, et par suite  $G$  est un groupe topologique localement compact (plonger  $G$  comme sous-groupe (algébrique) fermé de  $GL_n(F)$  pour  $n$  convenable ; la topologie ainsi obtenue sur  $G$  ne dépend pas du plongement choisi). De plus, tout voisinage de l'élément neutre,  $e$  de  $G$  contient un sous-groupe compact ouvert.

D'après Bruhat et Tits, il existe un analogue p-adique des décompositions bien connues de Cartan et d'Iwasawa pour les groupes de Lie semi-simples réels. Choisissons un tore déployé maximal  $A$  de  $G$ , et notons  $Z$  le plus grand sous-tore déployé contenu dans le centre de  $G$ . Notons  $\Delta$  le système de racines de  $G$  par rapport à  $A$  (voir [2]) et  $\Pi$  l'ensemble des racines positives par rapport à une chambre de Weyl. Pour toute racine  $\alpha$ , on note  $\xi_\alpha$  le caractère rationnel de  $A$  correspondant. On note alors  $A^+$  l'ensemble des  $a \in A$  tels que  $|\xi_\alpha(a)| \geq 1$  pour tout  $\alpha \in \Pi$  ; il existe un sous-groupe compact  $L$  de  $A$  et des éléments  $a_1, \dots, a_r$  de  $A$  tels que tout élément de  $A^+$  s'écrive sous la forme

$$(5) \quad a = k a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r} z$$

avec  $k \in L$ ,  $z \in Z$  et des entiers positifs  $n_1, \dots, n_r$ . Soit  $\Sigma$  le monoïde engendré par  $a_1, \dots, a_r$ . Il existe un sous-groupe compact ouvert  $K_0$  de  $G$  et un ensemble fini  $\Omega$  tels que

$$G = K_0 \Sigma Z \Omega K_0 \quad (\text{"décomposition de Cartan"}).$$

Soit  $P$  le sous-groupe parabolique de  $G$  associé à l'ensemble  $\Pi$  de racines de  $A$  ; alors  $(P, A)$  est une paire parabolique minimale. Comme  $G/P$  est une variété propre, l'espace homogène  $G/P$  est compact, et comme  $K_0$  est ouvert, il existe un ensemble fini  $\Omega_1$  tel que  $G = K_0 \Omega_1 P$ . On peut préciser comme suit ce résultat (Bruhat-Tits, non publié ; Raynaud et moi-même avons une autre démonstration).

THÉOREME 1.- Soit  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation linéaire rationnelle de  $G$ . Pour tout caractère  $\chi$  de  $A$ , soit  $V_\chi$  le sous-espace de poids  $\chi$  de  $V$ . Il existe alors un sous-groupe compact ouvert  $K_1$  de  $G$ , et un réseau  $\Lambda$  dans  $V$  avec les propriétés suivantes :

- a) On a la décomposition d'Iwasawa  $G = K_1 \cdot P$  .



b) On a  $\Lambda = \bigoplus_{\mathbf{x}} (V_{\mathbf{x}} \cap \Lambda)$  .

c) Le réseau  $\Lambda$  est stable par  $\rho(K_1)$  .

## § 2. Représentations admissibles

### 2.1 Représentations continues et représentations admissibles [5], [15], [3']

Soit  $(\pi, V)$  une représentation du groupe  $G$  dans un espace vectoriel complexe  $V$  . Pour tout sous-groupe  $\Gamma$  de  $G$  , notons  $V^{\Gamma}$  l'ensemble des vecteurs de  $V$  invariants par  $\pi(\Gamma)$  . On note  $V_{\infty}$  la réunion des sous-espaces  $V^L$  où  $L$  parcourt l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts de  $G$  . Soit  $K$  un sous-groupe compact ouvert de  $G$  et soit  $\mathcal{Z}(K)$  l'ensemble des classes de représentations irréductibles continues de  $K$  ; pour tout  $\mathfrak{d} \in \mathcal{Z}(K)$  , soit  $V_{\mathfrak{d}}$  la composante isotypique de type  $\mathfrak{d}$  de la restriction de  $\pi$  à  $K$  . On a

$$(6) \quad V_{\infty} = \bigoplus_{\mathfrak{d} \in \mathcal{Z}(K)} V_{\mathfrak{d}} .$$

On dira que la représentation  $(\pi, V)$  est continue (= smooth en anglais) si l'on a  $V = V_{\infty}$  , c'est-à-dire si le stabilisateur dans  $G$  de tout vecteur de  $V$  est ouvert.

Supposons désormais  $(\pi, V)$  continue. Soit  $\mathcal{H}(G)$  l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact sur  $G$  . Pour tout  $f \in \mathcal{H}(G)$  on définit l'opérateur  $\pi(f)$  dans  $V$  par

$$(7) \quad \pi(f).v = \int_G f(x) \pi(x)v \, dx \quad (v \in V)$$

où l'intégrale se réduit en fait à une somme finie. Alors  $V$  est un module sur  $\mathcal{H}(G)$  satisfaisant à la condition suivante de non-dégénérescence :

(ND) Tout élément de  $V$  est de la forme  $\sum_{i=1}^n \pi(f_i).v_i$  avec  $f_i \in \mathcal{H}(G)$  et  $v_i \in V$  pour  $i \leq n$  .

Réciproquement, toute structure de  $\mathcal{H}(G)$ -module sur  $V$  satisfaisant à (ND) est associée à une unique représentation  $\pi$  de  $G$  d'espace  $V$  . Les sous- $\mathcal{H}(G)$ -modules de  $V$  sont les sous-espaces de  $V$  stables par  $\pi(G)$  ; en particulier, la représentation  $(\pi, V)$  de  $G$  est irréductible (au sens algébrique) si et seulement si  $V$  est un  $\mathcal{H}(G)$ -module simple.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

471-06

- (i) Pour tout sous-groupe compact ouvert  $L$  de  $G$ , l'espace  $V^L$  est de dimension finie.
- (ii) Pour tout  $\mathfrak{o} \in \mathfrak{X}(K)$ , l'espace  $V_{\mathfrak{o}}$  est de dimension finie.
- (iii) Pour tout  $f \in \mathcal{H}(G)$ , l'opérateur  $\pi(f)$  est de rang fini dans  $V$ .

S'il en est ainsi, on dit que  $(\pi, V)$  est admissible. Posons alors

$$(8) \quad \Theta_{\pi}(f) = \text{Tr}(\pi(f)) \quad (f \in \mathcal{H}(G));$$

on dit que les formes linéaires sur  $\mathcal{H}(G)$  sont les distributions sur  $G$  et que  $\Theta_{\pi}$  est le caractère de  $\pi$ . On dit que la représentation  $(\pi, V)$  a un caractère central s'il existe un homomorphisme  $\omega_{\pi}$  de  $Z$  dans  $\mathbb{C}^{\times}$  tel que  $\pi(z) = \omega_{\pi}(z).1$  pour tout  $z \in Z$ . C'est le cas si la représentation  $(\pi, V)$  est admissible et irréductible ("lemme de Schur").

Le groupe  $G$  agit sur le dual  $V^*$  de  $V$  par  $g \mapsto {}^t \pi(g^{-1})$ ; on note  $\tilde{V}$  le sous-espace  $(V^*)_{\infty}$  de  $V^*$ , et  $\tilde{\pi}(g)$  la restriction de  ${}^t \pi(g^{-1})$  à  $\tilde{V}$ . Alors  $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$  est une représentation de  $G$ , dite contragrédiente de  $(\pi, V)$ ; si  $(\pi, V)$  est admissible, il en est de même de  $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$  et  $(\pi, V)$  est la contragrédiente de  $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ . On appelle coefficient de  $\pi$  toute fonction sur  $G$  de la forme

$$\pi_{\tilde{v}, v}(g) = \langle \tilde{v}, \pi(g)v \rangle$$

avec  $v \in V$ ,  $\tilde{v} \in \tilde{V}$ . L'ensemble des combinaisons linéaires de coefficients de  $\pi$  se note  $\mathcal{H}(\pi)$ .

## 2.2 Représentations paraboliques [14], [5], [10']

On dit que la représentation  $(\pi, V)$  de  $G$  est parabolique ("pointue" chez Jacquet [14] et "supercuspidal" en anglais) si elle est admissible et si tout coefficient de  $\pi$  est à support compact modulo  $Z$  (autrement dit, nulle en dehors d'un ensemble de la forme  $Z\Omega$  où  $\Omega \subset G$  est compact).

Soit  $\chi$  un homomorphisme continu de  $Z$  dans  $\mathbb{C}^{\times}$ . On note  $\mathcal{H}_{\chi}(G)$  l'espace des fonctions localement constantes sur  $G$ , à support compact modulo  $Z$ , telles que

$$(9) \quad f(zx) = \chi(z)f(x) \quad \text{pour } z \in Z, x \in G.$$

On dit qu'une fonction  $f$  de  $\mathcal{H}_{\chi}(G)$  est parabolique si l'on a

$$(10) \quad \int_{\mathbb{N}} f(xn)dn = 0$$

pour tout sous-groupe parabolique  $P \neq G$  de  $G$ , de radical unipotent  $N$ ; l'ensemble de ces fonctions se note  $\mathcal{H}_\chi^0(G)$ .

De plus, on note  $\mathcal{E}(G, \chi)$  l'ensemble des classes de représentations admissibles irréductibles de caractère central  $\chi$ , et  $\mathcal{E}^0(G, \chi)$  le sous-ensemble de celles de ces représentations qui sont paraboliques.

**THÉOREME 2.-** Pour toute représentation admissible irréductible  $(\pi, V)$  de  $G$ , il existe un isomorphisme de  $V \otimes \tilde{V}$  sur  $\mathcal{A}(\pi)$  transformant  $v \otimes \tilde{v}$  en  $\pi_{\tilde{v}, v}$ . De plus,  $\mathcal{H}_\chi^0(G)$  est somme directe des espaces  $\mathcal{A}(\pi)$  où  $\pi$  parcourt  $\mathcal{E}^0(G, \chi)$ .

Voici maintenant une variante des relations d'orthogonalité de Schur [5, p.11]

$$(11) \quad \int_{G/Z} \langle \tilde{v}_1, \pi(x)v_1 \rangle \langle \tilde{v}_2, \pi(x^{-1})v_2 \rangle dx = d(\pi)^{-1} \langle \tilde{v}_1, v_2 \rangle \langle \tilde{v}_2, v_1 \rangle ;$$

dans cette formule,  $(\pi, V)$  est une représentation parabolique irréductible,  $v_1$  et  $v_2$  sont dans  $V$ ,  $\tilde{v}_1$  et  $\tilde{v}_2$  dans  $\tilde{V}$ , et  $d(\pi)$  est une constante strictement positive ne dépendant que de  $\pi$ . On appelle  $d(\pi)$  le degré formel de  $\pi$ .

L'espace  $\mathcal{H}_\chi(G)$  est une algèbre pour le produit de convolution défini par

$$(12) \quad (f_1 * f_2)(x) = \int_{G/Z} f_1(xy^{-1})f_2(y)dy ;$$

ici, comme dans (11), la fonction à intégrer sur  $G$  est invariante par translation par  $Z$ , donc provient de  $G/Z$ , ce qui justifie d'intégrer sur  $G/Z$ . Alors

$\mathcal{H}_\chi^0(G)$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{H}_\chi(G)$ , de même que  $\mathcal{A}(\pi)$  pour toute  $\pi$  dans  $\mathcal{E}^0(G, \chi)$ . La structure de  $\mathcal{A}(\pi)$  se décrit comme suit : soit  $\mathcal{L}(\pi)$  l'algèbre des opérateurs  $T$  dans l'espace  $V$  de  $\pi$  pour lesquels il existe un sous-groupe compact ouvert  $L$  de  $G$  avec  $\pi(k)T\pi(k^{-1}) = T$  pour  $k, k'$  dans  $L$ . Pour  $T \in \mathcal{L}(\pi)$ , posons

$$(13) \quad \varphi_T(x) = d(\pi)\text{Tr}(T.\pi(x^{-1})) \quad (x \in G) ;$$

alors  $T \mapsto \varphi_T$  est un isomorphisme d'algèbres de  $\mathcal{L}(\pi)$  sur  $\mathcal{A}(\pi)$ . Par suite, comme  $\mathcal{H}_\chi(G)$ -module,  $V$  est isomorphe à un facteur direct de  $\mathcal{A}(\pi)$ , donc aussi de  $\mathcal{H}_\chi(G)$ . Malgré l'absence d'élément unité dans  $\mathcal{H}_\chi(G)$ , on en déduit le résultat suivant avec Casselman [5, p.12].

**THÉOREME 3.-** Soit  $(\pi, V)$  une représentation parabolique irréductible de  $G$ , de caractère central  $\chi$ . Alors  $V$  est projectif dans la catégorie des  $\mathcal{H}_\chi(G)$ -modules non-dégénérés (cf. condition (ND), page 471-05).

471-08

COROLLAIRE 1.- Toute représentation parabolique de  $G$  qui admet un caractère central est somme directe de représentations paraboliques irréductibles.

COROLLAIRE 2.- Soit  $(\pi, V)$  une représentation parabolique de  $G$  qui admet un caractère central. Pour qu'elle soit irréductible, il faut et il suffit que tout opérateur dans  $V$  qui commute à  $\pi(G)$  soit une homothétie.

### 2.3 Représentations induites

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe fermé de  $G$ . On laisse au lecteur le soin de définir l'algèbre  $\mathcal{H}(\Gamma)$  et les notions de représentation continue ou admissible de  $\Gamma$ .

Soit alors  $(\lambda, W)$  une représentation continue de  $\Gamma$ . Considérons l'espace  $V$  des applications  $f$  de  $G$  dans  $W$ , localement constantes, telles que <sup>1</sup>

$$f(\gamma g) = \beta(\gamma) \lambda(\gamma) f(\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma, g \in G),$$

et nulles en dehors d'un ensemble de la forme  $\Gamma\Omega$  où  $\Omega$  est compact. On note  $\pi(g)$  la translation à droite par  $g$  dans  $V$ . Alors  $(\pi, V)$  est une représentation continue de  $G$ , qu'on appelle la représentation de  $G$  induite par la représentation  $(\lambda, W)$  de  $\Gamma$ ; on la note  $\text{Ind}_{\Gamma}^G \lambda$ . Si  $G/\Gamma$  est compact et si  $(\lambda, W)$  est admissible, alors  $(\pi, V)$  est admissible; noter que  $G/P$  est compact si  $\mathbb{P}$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ .

On définit un isomorphisme de  $\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(\Gamma)} W$  sur  $V$ , d'où immédiatement une propriété universelle de  $(\pi, V)$  exprimant la réciprocité de Frobenius. Les théorèmes classiques de Mackey se transposent sans difficulté [17].

### 2.4 Réduction au cas des représentations paraboliques

On fixe une paire parabolique  $(\mathbb{P}, \mathbb{A})$  de  $G$ , de décomposition de Levi  $\mathbb{P} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{N}$ . Soit  $(\pi, V)$  une représentation continue de  $G$ . Notons  $V(\mathbb{P})$  le sous-espace de  $V$  engendré par les vecteurs  $\pi(n)v - v$  avec  $v \in V$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et  $V_{\mathbb{P}}$  le quotient  $V/V(\mathbb{P})$ . On montre facilement que  $V(\mathbb{P})$  se compose des vecteurs  $v$  de  $V$  pour lesquels il existe un sous-groupe compact ouvert  $U$  de  $\mathbb{N}$  avec

$$\int_U \pi(n)v \cdot dn = 0.$$

Il est clair que  $V(\mathbb{P})$  est stable par  $\pi(\mathbb{M})$ , d'où, par passage au quotient, une représentation  $(\sigma, V_{\mathbb{P}})$  de  $\mathbb{M}$ . On a donc défini un foncteur  $V \Rightarrow V_{\mathbb{P}}$  de la caté-

<sup>1</sup> On pose  $\beta = \Delta_G / \Delta_{\Gamma}$  où  $\Delta_G$  (resp.  $\Delta_{\Gamma}$ ) est la fonction module de  $G$  (resp.  $\Gamma$ ).

gorie des  $\mathcal{H}(G)$ -modules non-dégénérés dans celle des  $\mathcal{H}(M)$ -modules non-dégénérés. Ce foncteur est exact d'après Casselman [7]. Les théorèmes suivants sont dus essentiellement à Jacquet [14], [16].

THÉOREME 4.- Si la représentation  $(\pi, V)$  de  $G$  est admissible, avec un nombre fini de générateurs, alors la représentation  $(\sigma, V_P)$  de  $M$  est admissible, avec un nombre fini de générateurs.

THÉOREME 5.- Pour qu'une représentation admissible irréductible  $(\pi, V)$  de  $G$  soit parabolique, il faut et il suffit que l'on ait  $V_P = 0$  pour tout sous-groupe parabolique  $P \neq G$  de  $G$ .

Par induction sur le rang déployé de  $G/\mathbb{Z}$ , on déduit de là le résultat fondamental suivant de Jacquet.

THÉOREME 6.- Soit  $(\pi, V)$  une représentation admissible irréductible de  $G$ . Il existe une paire parabolique  $(P, A)$  de décomposition de Levi  $P = M.N$ , et une représentation parabolique irréductible  $(\sigma, W)$  de  $M$  telles que  $(\pi, V)$  soit contenue dans la représentation induite  $\text{Ind}_P^G \tau$ , où  $\tau$  est l'extension de  $\sigma$  à  $P = MN$ , triviale sur  $N$ .

Ce dernier théorème montre l'importance des représentations paraboliques. Le seul moyen dont on dispose pour en fabriquer remonte à Mautner [19]. Soit  $K$  un sous-groupe compact ouvert de  $G$ , et soit  $(\sigma, W)$  une représentation de  $K$  avec la propriété suivante : pour tout sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$ , il n'existe aucun vecteur non nul de  $W$  invariant par  $\sigma(K \cap N)$ . Alors la représentation  $\text{Ind}_K^G \sigma$  de  $G$  est parabolique. Pour  $G = \mathbb{GL}_2$ , on sait par Mautner [19], Shalika [22] et Silberger [23] que toutes les représentations paraboliques irréductibles de  $G$  s'obtiennent de cette manière, au moins lorsque  $q$  est impair ; une démonstration valable aussi pour  $q$  pair est due à Casselman [6] (voir aussi Kutzko [18]). En dehors de  $\mathbb{GL}_2$ , on ne sait rien ; même le cas de  $\mathbb{GL}_3$  n'est pas résolu.

### § 3. Existence des caractères

#### 3.1 Le théorème de finitude de Bernshtein [1]

Reprenons les notations du n° 1.2. Notons  $P$  le sous-groupe parabolique de  $G$  associé à  $\Pi$ , et  $N'$  le radical unipotent du sous-groupe parabolique associé à  $-\Pi$ . Soit  $K$  un sous-groupe compact ouvert de  $G$  ; on fait les deux hypothèses

474-10

suivantes :

- (i)  $K$  est distingué dans  $K_0$  ;
- (ii) si l'on pose  $\Gamma^+ = P \cap K$  et  $\Gamma^- = N' \cap K$ , on a  $K = \Gamma^- \Gamma^+$  et  
 $a_1 \Gamma^- a_1^{-1} \subset \Gamma^-$ ,  $a_1^{-1} \Gamma^+ a_1 \subset \Gamma^+$ .

D'après Jacquet, tout voisinage de  $e$  dans  $G$  contient un tel sous-groupe  $K$ .

Soit  $\mathcal{H}(G, K)$  la sous-algèbre de  $\mathcal{H}(G)$  formée des fonctions biinvariantes par  $K$ . Normalisons la mesure de Haar  $m$  sur  $G$  par  $m(K) = 1$ . Alors la fonction caractéristique  $e_K$  de  $K$  est l'élément unité de  $\mathcal{H}(G, K)$ . Pour tout  $g \in G$ , soit  $\delta_g$  la masse unité en  $g$  et  $H(g) = e_K * \delta_g * e_K$ ; c'est un multiple constant de la fonction caractéristique de  $KgK$ . Lorsque  $g$  parcourt un système de représentants des doubles classes modulo  $K$ ,  $H(g)$  décrit une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{H}(G, K)$ ; de plus  $H(e) = e_K$ .

THÉORÈME 7.- Il existe un entier  $N > 0$  tel que tout  $\mathcal{H}(G, K)$ -module simple de dimension finie sur  $\mathbb{C}$  ait une dimension  $\leq N$ .

Voici en abrégé la démonstration.

Pour  $p \in \Sigma$ , posons  $\Gamma_p^+ = p^{-1} \Gamma^+ p$  et  $\Gamma_p^- = p \Gamma^- p^{-1}$ , d'où  $\Gamma_p^+ \subset \Gamma^+$ ,  $\Gamma_p^- \subset \Gamma^-$ . Le calcul suivant

$$(14) \quad KpKqK = Kp\Gamma_p^- \Gamma_p^+ qK = K\Gamma_p^- pq\Gamma_p^+ K = KpqK$$

entraîne  $H(p)H(q) = H(pq)$  pour  $p, q$  dans  $\Sigma$ .

Soit  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{Z}$ ) la sous-algèbre de  $\mathcal{H}(G, K)$  formée des fonctions à support dans  $K\Sigma ZK$  (resp.  $KZK$ ). Alors  $\mathcal{Z}$  est contenue dans le centre de  $\mathcal{H}(G, K)$ , et d'après ce qui précède,  $\mathcal{A}$  est l'algèbre de polynômes  $\mathcal{Z}[H(a_1), \dots, H(a_r)]$ .

Choisissons un ensemble fini  $Y$  tel que  $K\Omega K_0 = YK$ , et pour tout  $p \in \Sigma$  posons

$$(15) \quad f(p) = \sum_{y \in Y} m(\Gamma_p^+ yK).$$

On définit une relation d'ordre partiel sur  $\Sigma$  en posant  $p \leq q$  s'il existe  $p'$  dans  $\Sigma$  avec  $q = pp'$ . La fonction  $f$  est à valeurs entières positives et satisfait à  $f(p) \geq f(q)$  lorsque  $p \leq q$ . Soit  $\Sigma_0$  l'ensemble des  $p \in \Sigma$  tels que  $f(q) > f(p)$  pour tout  $q < p$  dans  $\Sigma$ ; un argument combinatoire facile montre que  $\Sigma_0$  est fini. Si  $p \in \Sigma - \Sigma_0$ , il existe  $p'$  dans  $\Sigma$  tel que  $p' < p$  et

$f(p') = f(p)$ , d'où  $\Gamma_p^+ yK = \Gamma_{p'}^+ yK$  pour tout  $y \in Y$ . Un calcul analogue à (14)

entraîne alors  $H(p'')H(p'y) = H(py)$  si  $p = p'p''$ . On en déduit que l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{H}(G, K)$  à support dans  $K\Sigma ZK\Omega K_0 = K\Sigma ZYK$  est un  $\mathcal{A}$ -module à gauche de type fini engendré par les  $H(py)$  pour  $p \in \Sigma_0$  et  $y \in Y$ . Soit enfin  $X$  un ensemble fini tel que  $K_0 = XK$ . Alors tout élément de  $\mathcal{H}(G, K)$  s'écrit sous la forme

$$(16) \quad \sum_{x \in X} \sum_{p \in \Sigma_0} \sum_{y \in Y} H(x)a(p, x, y)H(py)$$

avec des éléments  $a(p, x, y)$  de  $\mathcal{A}$ .

Soit  $V$  un  $\mathcal{H}(G, K)$ -module de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{C}$ . Les opérateurs  $A_1, \dots, A_r$  dans  $V$ , correspondant à  $H(a_1), \dots, H(a_r)$  commutent deux à deux ; soit  $\mathcal{R}$  l'algèbre qu'ils engendrent. Posons  $c = 2(1 - 2^{-r})$ . Comme  $\mathcal{R}$  est commutative, on a  $\dim \mathcal{R} \leq n^c$ . Comme  $V$  est un  $\mathcal{H}(G, K)$ -module simple,  $\mathcal{Z}$  agit par homothéties dans  $V$ , tout opérateur dans  $V$  provient d'un élément de  $\mathcal{H}(G, K)$  (th. de Burnside). De (16), on déduit

$$|X| |\Sigma_0| |Y| \cdot \dim \mathcal{R} \geq \dim \text{End}(V) = n^2$$

et finalement

$$(17) \quad \dim V \leq (|X| |\Sigma_0| |Y|)^{2^{r-1}}.$$

### 3.2 La majoration fondamentale

THÉORÈME 8.- Soit  $K$  un sous-groupe compact ouvert de  $G$ , et soit  $\mathfrak{b}$  une classe de représentations irréductibles continues de  $K$ . Il existe une constante  $N > 0$  telle que  $(\lambda: \mathfrak{b}) \leq N$  pour toute représentation unitaire irréductible  $(\lambda, \mathcal{H})$  de  $G$ .

Il suffit de prouver que, pour tout sous-groupe compact ouvert  $K$  de  $G$ , il existe une constante  $N_K$  telle que  $\dim \mathcal{H}^K \leq N_K$  pour toute représentation unitaire irréductible  $(\lambda, \mathcal{H})$  de  $G$ . On prouve tout d'abord que  $\mathcal{H}^K$  est un  $\mathcal{H}(G, K)$ -module simple. Supposons alors  $\lambda$  de carré intégrable ; l'opérateur  $\lambda(e_K)$  est de Hilbert-Schmidt puisque  $e_K$  est une fonction continue à support compact. Comme  $\lambda(e_K)$  est le projecteur orthogonal de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}^K$ , on voit que  $\mathcal{H}^K$  est de dimension finie. Le théorème 7 fournit alors une majoration de la dimension de  $\mathcal{H}^K$ .

On en déduit, par la méthode de Godement [9] pour les fonctions sphériques, l'existence d'un entier  $p \geq 1$  tel que le commutateur

474-12

$[f_1, \dots, f_p] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma f_{\sigma(1)} \dots f_{\sigma(p)}$  soit nul quels que soient  $\chi : Z \rightarrow \mathbb{C}^\times$  et

$f_1, \dots, f_p$  dans la sous-algèbre  $\mathcal{H}_\chi^0(G) \cap \mathcal{H}_\chi(G, K)$  (cf. n° 2.2), où  $\mathcal{H}_\chi(G, K)$  se compose des fonctions de  $\mathcal{H}_\chi(G)$  biinvariantes par  $K$ .

On utilise ensuite une construction analogue à celle de  $V(P)$  au n° 2.4, mais cette fois pour le groupe  $K$ . Il n'est pas difficile d'en déduire l'existence d'un entier  $q \geq 1$  tel que  $[f_1, \dots, f_q] = 0$  quels que soient  $\chi$  et  $f_1, \dots, f_q$  dans  $\mathcal{H}_\chi(G, K)$ . On en déduit une majoration uniforme (aussi en  $\chi$ ) de la dimension des  $\mathcal{H}_\chi(G, K)$ -modules simples de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . Le théorème 8 est alors de démonstration facile (prendre pour  $\chi$  le caractère central de  $\lambda$ ).

Le lecteur pourra reconstituer les détails de cette démonstration à l'aide du chapitre II de Harish-Chandra et van Dijk [11].

### 3.3 Quelques conséquences de la majoration

Soit  $(\pi, V)$  une représentation admissible de  $G$ . On dit que  $\pi$  est préunitaire s'il existe sur  $V$  une forme hermitienne positive  $\Phi$ , non-dégénérée, invariante par  $G$ . S'il en est ainsi,  $\pi$  est somme directe de représentations admissibles préunitaires irréductibles  $\pi_i$ , chacune des  $\pi_i$  n'intervenant qu'un nombre fini de fois. De plus, soit  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert complété de  $V$  pour  $\Phi$ . Alors  $\pi$  se prolonge en une représentation unitaire  $\lambda$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}$ , et l'on a  $V = \mathcal{H}_\infty$  avec les notations du n° 2.1. Si de plus,  $(\pi, V)$  est algébriquement irréductible, alors  $(\lambda, \mathcal{H})$  est topologiquement irréductible.

Les remarques précédentes sont élémentaires. Voici une réciproque, corollaire du théorème 8.

THÉORÈME 9.- L'opération de complétion est une équivalence de la catégorie des représentations admissibles préunitaires (algébriquement) irréductibles de  $G$  sur celle des représentations unitaires (topologiquement) irréductibles.

Une forme plus faible du théorème 9 assure l'existence des caractères :

THÉORÈME 10.- Si  $(\lambda, \mathcal{H})$  est une représentation unitaire irréductible de  $G$ , l'opérateur  $\lambda(f)$  est de rang fini pour toute fonction localement constante  $f$  à support compact sur  $G$ . En particulier, le caractère de  $\lambda$  est défini en tant que distribution sur  $G$ .



Par passage à la limite,  $\lambda(f)$  est un opérateur compact pour toute fonction  $f$  intégrable sur  $G$ . D'après Dixmier [8, p.111], on en déduit que  $G$  est de type I. Autrement dit, soit  $(\lambda, \mathcal{H})$  une représentation unitaire de  $G$  qui n'est pas équivalente à la somme de deux représentations unitaires  $(\lambda_1, \mathcal{H}_1)$  avec  $\text{Hom}_G(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  réduit à  $0$ . Alors  $(\lambda, \mathcal{H})$  est un multiple d'une représentation irréductible. Rappelons qu'il existe une formule de Plancherel "abstraite" pour les groupes de type I (cf. [8, p.328]).

#### § 4. Le théorème de R. Howe

##### 4.1 Enoncé du théorème

On note  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ ; pour  $X \in \mathfrak{g}$  et  $x \in G$ , on note  $x.X$  le transformé de  $X$  par  $\text{Ad } x$ . De plus, on note  $\omega$  une partie de  $\mathfrak{g}$  sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

Il existe une partie compacte  $R$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\omega$  soit l'adhérence de la réunion des orbites  $X^G$  des points  $X$  de  $R$ .

On note  $J(\omega)$  l'espace des distributions sur  $\mathfrak{g}$  invariantes par le groupe adjoint  $\text{Ad } G$ , de support contenu dans  $\omega$ . Enfin, soit  $\Lambda$  un réseau dans  $\mathfrak{g}$  (c'est-à-dire un  $\mathfrak{g}$ -module de type fini engendrant  $\mathfrak{g}$  sur le corps  $F$ ). Pour toute distribution  $T$  sur  $\mathfrak{g}$  et tout  $X \in \mathfrak{g}$ , on pose  $j_\Lambda T(X) = T(\varphi_{X+\Lambda})$  où  $\varphi_\Lambda$  est la fonction caractéristique d'une partie  $A$  de  $\mathfrak{g}$ . La fonction  $j_\Lambda T$  sur  $\mathfrak{g}$  est invariante par les translations de  $\Lambda$ .

THÉORÈME 11.- Supposons  $F$  de caractéristique  $0$ . L'espace des fonctions  $j_\Lambda T$ , où  $T$  parcourt  $J(\omega)$ , est de dimension finie.

##### 4.2 Démonstration abrégée

On dit qu'un élément  $X$  de  $\mathfrak{g}$  est nilpotent s'il appartient à  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  et si  $\text{ad } X$  est nilpotent; soit  $\mathcal{N}$  l'ensemble de ces éléments. En appliquant le théorème de Jacobson-Morozov, la conjugaison des tores déployés maximaux dans  $\mathfrak{G}$ , et le théorème 1 (avec  $\rho = \text{Ad}$ ), on prouve ce qui suit. Etant donné  $X_0 \in \mathcal{N}$ , il existe un réseau  $\Lambda_1$  dans  $\mathfrak{g}$ , un sous-groupe compact ouvert  $K$  de  $G$ , et une paire parabolique  $(P, A)$  de  $\mathfrak{G}$  de décomposition de Levi  $P = M \cdot N$ , avec les propriétés suivantes :

471-14

a) Soient  $\mathfrak{m}$  l'algèbre de Lie de  $\mathbb{M}$  et  $\mathfrak{n}$  celle de  $\mathbb{N}$ , et soit  $\mathfrak{n}'$  l'algèbre de Lie du radical unipotent  $\mathbb{N}'$  du groupe parabolique opposé à  $\mathbb{P}$  (cf. début du n° 3.1). On a  $X_0 \in \mathfrak{n}$  et

$$(18) \quad \Lambda_1 = (\Lambda_1 \cap \mathfrak{n}') \oplus (\Lambda_1 \cap \mathfrak{m}) \oplus (\Lambda_1 \cap \mathfrak{n}).$$

b) Le réseau  $\Lambda_1$  est stable par  $\text{Ad } K$ .

c) On a  $G = K.P$ .

On considère ensuite la norme sur  $\mathfrak{g}$  telle que  $\Lambda_1$  soit l'ensemble des  $X$  avec  $\|X\| \leq 1$ .

Choisissons  $\gamma \in A$  tel que l'on ait  $|\xi_\alpha(\gamma)| < 1$  pour toute racine  $\alpha$  associée à  $\mathbb{N}$ . On a alors  $\|\gamma.X_0\| < \|X_0\|$  et  $\gamma.(\Lambda_1 \cap \mathfrak{n}') \supset (\Lambda_1 \cap \mathfrak{n}')$ . Pour  $X \in \mathfrak{g}$ , notons  $K_\gamma(X)$  l'intersection des normalisateurs dans  $K$  des sous-ensembles  $\gamma.\Lambda_1$  et  $\gamma.X + \Lambda_1$  de  $\mathfrak{g}$ . On définit une application  $\beta$  de  $K_\gamma(X)$  dans  $\Lambda_1 \cap \mathfrak{n}$  par la congruence

$$(19) \quad \beta(k) \equiv k\gamma.X - \gamma.X \pmod{\mathfrak{m} + \mathfrak{n}'}$$

Lemme 1.- Il existe un voisinage ouvert  $U_1$  de  $X_0$  et un nombre  $t > 0$  tels que pour tout  $X \in \mathfrak{g}$  de la forme  $X = c.Y$  avec  $c \in \mathbb{F}$ ,  $Y \in U_1$  et  $\|X\| \geq t$ , l'application  $\beta$  de  $K_\gamma(X)$  dans  $\Lambda_1 \cap \mathfrak{n}$  soit une submersion surjective.

Comme  $\mathfrak{n}$  est contenu dans  $[X_0, \mathfrak{g}]$ , il existe un sous-espace  $\mathfrak{u}$  de  $\mathfrak{g}$  tel que  $\text{ad}(\gamma.X_0)$  induise un isomorphisme de  $\mathfrak{u}$  sur  $\mathfrak{n}$ . Par continuité, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $X_0$  tel que  $\text{ad } Z$  induise un isomorphisme  $\beta_Z$  de  $\mathfrak{u}$  sur  $\mathfrak{n}$  pour tout  $Z \in \mathfrak{v}.U$ . Par suite,  $\beta$  est submersive pour tout  $X$  assez voisin de  $X_0$ . Le fait que  $\beta$  soit surjective se voit par un argument d'approximations successives assez délicat.

Sous les hypothèses du lemme 1, toute fonction localement constante sur  $\Lambda_1 \cap \mathfrak{n}$  est donc l'intégrale sur les fibres de  $\beta$  d'une fonction localement constante sur  $K_\gamma(X)$ . On en déduit facilement l'énoncé suivant.

Lemme 2.- Quitte à rapetisser  $U_1$  et augmenter  $t$  dans le lemme 1, on a la propriété suivante. Pour tout  $X$  comme dans le lemme 1, il existe une fonction  $\alpha \in \mathcal{H}(G)$ , d'intégrale 1 et telle que la fonction  $\varphi_{\alpha, X}$  définie par

$$(20) \quad \varphi_{\alpha, X}(Y) = \int_G \alpha(x) \varphi_\Lambda(x^{-1}.Y - X) dx \quad (Y \in \mathfrak{g})$$

soit invariante par les translations de  $\Lambda$ , et de support contenu dans l'ensemble des  $Y \in \mathfrak{g}$  tels que  $\|Y\| < \|X\|$ .

Un argument géométrique facile, utilisant la relation  $G = K.P$ , entraîne le lemme suivant.

Lemme 3.- Il existe un réseau  $\Lambda_2$  tel que  $\omega$  soit contenu dans  $\mathcal{A}^+ \Lambda_2$ .

Un argument de compacité montre alors l'existence d'un nombre  $t_1 \geq t$  tel que tout  $X \in \omega$  avec  $\|X\| \geq t_1$  ait la propriété énoncée dans le lemme 2. Un calcul facile montre alors que pour tout  $X \in \mathfrak{g}$  avec  $\|X\| \geq t_1$ , il existe des constantes complexes  $c_1, \dots, c_r$  et des éléments  $X_1, \dots, X_r$  de  $\mathfrak{g}$  avec  $\|X_i\| < \|X\|$  pour  $1 \leq i \leq r$ , tels que l'on ait

$$(21) \quad j_{\Lambda} T(X) = \sum_{i=1}^r c_i j_{\Lambda} T(X_i)$$

pour toute distribution  $T$  dans  $J(\omega)$ . Comme l'ensemble des valeurs non nulles prises par la norme est discret, le théorème de R. Howe s'obtient immédiatement.

#### 4.3 Une conjecture [12]

Soit  $\Omega$  une partie de  $G$ ; on suppose qu'il existe une partie compacte  $R$  de  $G$  telle que  $\Omega$  soit l'adhérence de la réunion des classes de conjugaison des points de  $R$ . Notons  $I(\Omega)$  l'ensemble des distributions sur  $G$ , à support dans  $\Omega$ , invariantes par les automorphismes intérieurs de  $G$ . Soit enfin  $L$  un sous-groupe compact ouvert de  $G$ ; pour toute distribution  $T$  sur  $G$ , définissons la fonction  $i_L T$  sur  $G$  par

$$(22) \quad i_L T(x) = T(\varphi_{x \cdot L}).$$

CONJECTURE.- L'espace des fonctions  $i_L T$ , où  $T$  parcourt  $I(\Omega)$ , est de dimension finie.

### § 5. Structure des caractères

#### 5.1 Transformation de Fourier dans l'algèbre de Lie

On suppose désormais que le corps  $F$  est de caractéristique 0. On fixe un caractère additif  $\psi$  de  $F$ , de conducteur  $\sigma$  et une forme bilinéaire symétrique  $B$  sur  $\mathfrak{g}$ , invariante par  $\text{Ad } G$ , et non-dégénérée. On définit la transformation de Fourier sur  $\mathfrak{g}$  par

471-16

$$(23) \quad \hat{f}(X) = \int_{\mathfrak{g}} \psi(B(X, Y)) f(Y) dY,$$

la mesure de Haar sur  $\mathfrak{g}$  étant normalisée de sorte que l'on ait la formule d'inversion

$$(24) \quad f(X) = \int_{\mathfrak{g}} \psi(-B(X, Y)) \hat{f}(Y) dY.$$

Ces définitions ont un sens pour  $f$  dans l'espace  $C_c^\infty(\mathfrak{g})$  des fonctions localement constantes à support compact sur  $\mathfrak{g}$  ; par dualité, on définit la transformation de Fourier pour les distributions sur  $\mathfrak{g}$  .

Définissons encore les fonctions  $\eta$  sur  $\mathfrak{g}$  et  $D$  sur  $G$  , à valeurs dans  $F$ , par

$$(25) \quad \det(t - \text{ad } X) \equiv t^\ell \eta(X) \quad \text{mod. } t^{\ell+1},$$

$$(26) \quad \det(t - \text{Ad } g + 1) \equiv t^\ell D(g) \quad \text{mod. } t^{\ell+1},$$

pour  $X \in \mathfrak{g}$  ,  $g \in G$  . On pose  $\mathfrak{g}' = \{\eta \neq 0\}$  et  $G' = \{D \neq 0\}$  .

THÉORÈME 12.- Soit  $\omega \subset \mathfrak{g}$  comme au paragraphe 4, et soit  $T \in J(\omega)$  . La distribution  $\hat{T}$  jouit des propriétés suivantes :

- a) C'est une fonction localement intégrable sur  $\mathfrak{g}$  .
- b) C'est une fonction localement constante sur  $\mathfrak{g}'$  .
- c) La fonction  $|\eta|^{\frac{1}{2}} \hat{T}$  est localement bornée sur  $\mathfrak{g}$  .

Comme corollaire, considérons l'orbite  $\zeta$  d'un point  $X_0$  de  $\mathfrak{g}$  . Le stabilisateur  $\Gamma$  de  $X_0$  dans  $G$  est unimodulaire tout comme  $G$  , et il existe donc une mesure invariante  $\nu$  sur  $G/\Gamma$  , qu'on transporte à  $\zeta$  par l'application  $g\Gamma \mapsto g \cdot X_0$  . On sait par Rao [20] et Deligne que l'image de  $\nu$  par l'injection de  $\zeta$  dans  $\mathfrak{g}$  attribue une masse finie à tout compact de  $\mathfrak{g}$  , donc peut être considérée comme une mesure de Radon  $\mu_\zeta$  sur  $\mathfrak{g}$  , ayant pour support l'adhérence  $\bar{\zeta}$  de  $\zeta$  . Le théorème 12 montre alors que  $\hat{\mu}_\zeta$  est une fonction sur  $\mathfrak{g}$  , avec les propriétés a), b) et c) dudit théorème. Cette construction est surtout utile lorsque  $X_0$  est nilpotent ; en particulier, on a  $\hat{\mu}_{\{0\}} = 1$  .

## 5.2 Comportement local sur l'algèbre de Lie

Soient  $A$  un tore maximal dans  $\mathfrak{G}$  ,  $\mathfrak{a}$  son algèbre de Lie et  $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}'$  . Pour toute fonction  $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$  , on définit une fonction  $\Phi_f^A$  sur  $\mathfrak{a}'$  par