Università di Modena e Reggio Emilia

Facoltà di Ingegneria - sede di Modena

ESERCIZI
di
MECCANICA RAZIONALE A

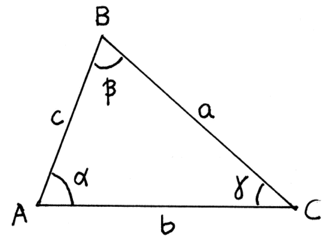
Docente: Prof. Valter Franceschini

Corsi di Laurea in Ingegneria (NOD)

- a.a. 2009/10 -

1. ESERCIZI DI CALCOLO VETTORIALE

Esercizio 1.1 Dimostrare il teorema di Carnot.



Consideriamo un triangolo ABC di lati $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ e angoli $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{ACB}$. Si può scrivere

$$B - C = (B - A) + (A - C)\,. \qquad (E1.1)$$

Facciamo il quadrato di ambi i membri (moltiplicando scalarmente ciascun membro per se stesso):

$$(B - C)\cdot(B - C) = (B - A)\cdot(B - A) + (A - C)\cdot(A - C) + 2(B - A)\cdot(A - C)\,,$$

e quindi

$$(B - C)^2 = (B - A)^2 + (A - C)^2 + 2(B - A)\cdot(A - C)$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2cb\cos(\pi - \alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,.$$

Si è così ottenuto il (ben noto) teorema di Carnot: *in un triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati meno il doppio del prodotto di questi due moltiplicato per il coseno dell'angolo fra essi compreso.*

Esercizio 1.2 Dimostrare il teorema dei seni.

Consideriamo ancora il triangolo ABC e l'equazione ($E1.1$). Moltiplicando vettorialmente a destra ambo i membri per $(A - C)$ otteniamo

$$(B - C)\times(A - C) = (B - A)\times(A - C) + (A - C)\times(A - C)\,.$$

Osservato che il prodotto più a destra è nullo, consideriamo i moduli dei due membri, che ovviamente sono uguali:

$$ab\sin\gamma = cb\sin(\pi - \alpha)\,.$$

Essendo $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, ne segue

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}\,.$$

Se invece si moltiplica vettorialmente la ($E1.1$) a destra per $(B - A)$, con calcoli del tutto analoghi si ottiene

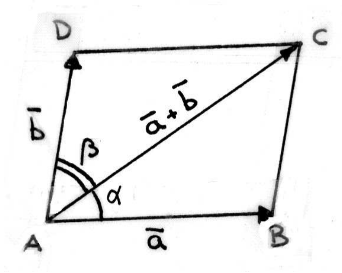
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}\,.$$

Mettendo insieme i due risultati si ha il (ben noto) teorema dei seni

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\,,$$

ossia: *in un triangolo i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.*

Esercizio 1.3 *Dati due vettori $\overline{a}$ e $\overline{b}$ che formano un angolo γ, determinare il modulo della loro somma e gli angoli α e β che essa forma con $\overline{a}$ e $\overline{b}$.*



Consideriamo il triangolo ABC con $\overline{a} = B - A$ e $\overline{b} = C - B$, per cui $\overline{a} + \overline{b} = C - A$. Applicandovi il teorema di Carnot si ha

$$|\overline{a} + \overline{b}| = \big(a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \gamma)\big)^{\frac{1}{2}} = (a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Per il teorema dei seni

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{|\overline{a} + \overline{b}|}{\sin(\pi - \gamma)} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\alpha = \frac{b\sin\gamma}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Analogamente si ottiene

$$\sin\beta = \frac{a\sin\gamma}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Esercizio 1.4 *Il vettore $\overline{a}$ di modulo 3 forma con l'asse x l'angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$, con l'asse y l'angolo $\beta = \frac{\pi}{3}$ e con l'asse z un angolo acuto γ. Determinare le componenti cartesiane di $\overline{a}$ e l'angolo γ.*

Si ha:

$$\begin{aligned}
a_x &= \overline{a} \cdot \overline{i} = a\cos\alpha = 3\cos\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2} \\
a_y &= \overline{a} \cdot \overline{j} = a\cos\beta = 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \\
a_z &= \overline{a} \cdot \overline{k} = a\cos\gamma\,.
\end{aligned}$$

L'ultima relazione fornisce $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{a}$; inoltre, essendo $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, da cui $a_z = \pm(a^2 - a_x^2 - a_y^2)^{\frac{1}{2}}$, si ha

$$\cos\gamma = \frac{\pm\Big(9 - \dfrac{18}{4} - \dfrac{9}{4}\Big)^{\frac{1}{2}}}{3} = \frac{\pm\dfrac{3}{2}}{3} = \pm\frac{1}{2}\,.$$

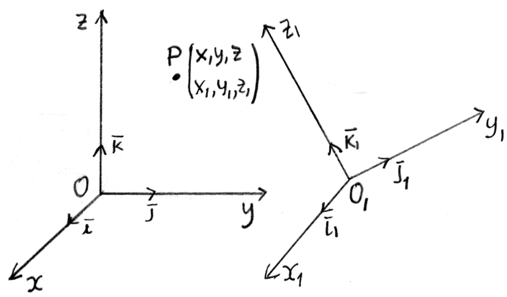
Tenendo poi conto che γ è acuto, ne consegue che $\cos\gamma$ è positivo, il che elimina l'incertezza del segno. Da $\cos\gamma = \dfrac{1}{2}$ si deduce quindi

$$a_z = \frac{3}{2}\,, \qquad \gamma = \pm\frac{\pi}{3}\,.$$

Notiamo che $\cos\gamma$ poteva ricavarsi anche attraverso la relazione $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, da cui, tenendo di nuovo conto del dato che γ è acuto,

$$\cos\gamma = \left(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 1.5 *Siano $Oxyz$ e $O_1x_1y_1z_1$ due sistemi di riferimento cartesiani ortogonali, con le rispettive terne di versori $(\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k})$ e $(\bar{\imath}_1, \bar{\jmath}_1, \bar{k}_1)$. Indicate con (a, b, c) le coordinate di O_1 rispetto ad $Oxyz$, determinare le formule di trasformazione di coordinate da un sistema all'altro.*



Siano (x, y, z) e (x_1, y_1, z_1) le coordinate di un qualunque punto P rispetto ad $Oxyz$ e $O_1x_1y_1z_1$ rispettivamente. Il vettore $P - O_1$, rappresentato rispetto ad $O_1x_1y_1z_1$, avrà perciò l'espressione

$$P - O_1 = x_1\bar{\imath}_1 + y_1\bar{\jmath}_1 + z_1\bar{k}_1,$$

mentre rispetto ad $Oxyz$ avremo

$$P-O_1 = (P-O+O-O_1) = (P-O)-(O_1-O) = (x-a)\,\bar{\imath}+(y-b)\,\bar{\jmath}+(z-c)\,\bar{k}.$$

Uguagliando i due membri destri di queste due relazioni si ottiene

$$x_1\bar{\imath}_1 + y_1\bar{\jmath}_1 + z_1\bar{k}_1 = (x-a)\bar{\imath} + (y-a)\bar{\jmath} + (z-a)\bar{k}. \qquad (E1.2)$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri di questa uguaglianza per il versore $\bar{\imath}_1$ si ottiene

$$x_1 = (x-a)\cos\widehat{x_1x} + (y-b)\cos\widehat{x_1y} + (z-c)\cos\widehat{x_1z}.$$

Analogamente, moltiplicando scalarmente per $\bar{\jmath}_1$ e $\bar{k}_1$ si ricavano

$$y_1 = (x-a)\cos\widehat{y_1x} + (y-b)\cos\widehat{y_1y} + (z-c)\cos\widehat{y_1z},$$

$$z_1 = (x-a)\cos\widehat{z_1x} + (y-b)\cos\widehat{z_1y} + (z-c)\cos\widehat{z_1z}.$$

Le tre relazioni appena ricavate rappresentano le formule di trasformazione dalle coordinate (x, y, z) alle coordinate (x_1, y_1, z_1). Determiniamo ora le formule inverse. A tal fine, se moltiplichiamo scalarmente la $(E1.2)$ prima per il versore $\bar{\imath}$, poi per $\bar{\jmath}$ ed infine per $\bar{k}$, otteniamo

$$x = a + x_1\cos\widehat{x_1x} + y_1\cos\widehat{y_1x} + z_1\cos\widehat{z_1x},$$

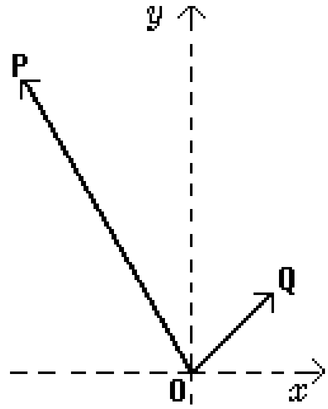
$$y = b + x_1\cos\widehat{x_1y} + y_1\cos\widehat{y_1y} + z_1\cos\widehat{z_1y},$$

$$z = c + x_1\cos\widehat{x_1z} + y_1\cos\widehat{y_1z} + z_1\cos\widehat{z_1z}.$$

Esercizio 1.6 *Nel piano Oxy sono dati i vettori $P-O$, di modulo 6 e formante un angolo di $\frac{2}{3}\pi$ con la direzione positiva dell'asse x, e $Q-O$, di modulo 2 e formante un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con la direzione positiva dell'asse x. Determinare:*

i) $\quad |P-Q|\,;$

ii) $\quad |(P-O)+2(Q-O)|\,.$



La rappresentazione cartesiana di un vettore piano $\overline{a}$, di modulo a e formante un angolo α con la direzione positiva dell'asse x è la seguente:

$$\overline{a} = a_x\,\overline{i} + a_y\,\overline{j} = a(\cos\alpha\,\overline{i} + \sin\alpha\,\overline{j})\,.$$

I due vettori dati, in forma cartesiana, sono dunque i seguenti:

$$Q-O = 2\big(\cos\frac{\pi}{4}\overline{i} + \sin\frac{\pi}{4}\overline{j}\big) = \sqrt{2}\,\overline{i} + \sqrt{2}\,\overline{j}\,;$$
$$P-O = 6\big(\cos\frac{2\pi}{3}\overline{i} + \sin\frac{2\pi}{3}\overline{j}\big) = -3\,\overline{i} + 3\sqrt{3}\,\overline{j}\,.$$

i) $$\big|P-Q\big| = \big|(P-O)-(Q-O)\big| = \big|(-3-\sqrt{2})\,\overline{i} + (3\sqrt{3}-\sqrt{2})\,\overline{j}\big| = \sqrt{(-3-\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} =$$
$$= \sqrt{9+2+6\sqrt{2}+27+2-6\sqrt{6}} = \sqrt{40+6\sqrt{2}-6\sqrt{6}}\,.$$

oppure, ricordando il teorema di Carnot e la formula per $\cos(\alpha+\beta)$:

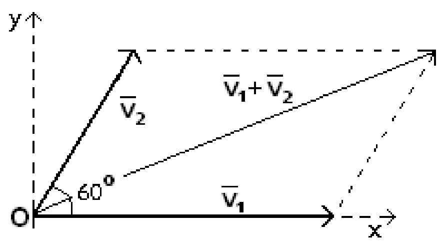
$$\big|P-Q\big| = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\,\overline{OP}\,\overline{OQ}\,\cos\widehat{POQ}} = \sqrt{36+4-24\,\cos\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\Big)} =$$
$$= \sqrt{40-24\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{40-6\sqrt{6}+6\sqrt{2}}\,.$$

ii) $$\big|(P-O)+2(Q-O)\big| = \big|(-3+2\sqrt{2})\,\overline{i} + (3\sqrt{3}+2\sqrt{2})\,\overline{j}\big| = \sqrt{(-3+2\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2} =$$
$$= \sqrt{9+8-12\sqrt{2}+27+8+12\sqrt{6}} = \sqrt{52-12\sqrt{2}+12\sqrt{6}}\,.$$

Esercizio 1.7 *Sono dati i vettori $\overline{v}_1$ e $\overline{v}_2$, di modulo rispettivamente 5 e 3 e formanti un angolo di 60°. Si chiede di determinare i versori $\overline{a}$ e $\overline{b}$, complanari ai due vettori dati, tali che*

i) $\quad (\overline{v}_1 + \overline{v}_2)\cdot\overline{a} = 0\,,$

ii) $\quad (\overline{v}_1 + \overline{v}_2)\times\overline{b} = \overline{0}\,.$



Sia Oxy un piano che contiene $\overline{v}_1$ e $\overline{v}_2$. Supposti i due vettori con l'origine in O e $\overline{v}_1$ disposto lungo l'asse x, avremo:

$$\overline{v}_1 = 5\overline{i}\,, \qquad \overline{v}_2 = 3(\cos\tfrac{\pi}{3}\overline{i} + \sin\tfrac{\pi}{3}\overline{j}) = \tfrac{3}{2}\overline{i} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\overline{j}\,, \qquad \overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \tfrac{13}{2}\overline{i} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\overline{j}\,.$$

i) Sia $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j}$ un vettore incognito. Perchè $\overline{a}$ sia un versore e sia ortogonale a $\overline{v}_1 + \overline{v}_2$ deve soddisfare le condizioni $|\overline{a}| = 1$ e $\overline{a}\cdot(\overline{v}_1+\overline{v}_2) = \overline{0}$. Si deve dunque avere:

$$\begin{cases} a_x^2 + a_y^2 = 1 \\ \frac{13}{2}a_x + \frac{3\sqrt{3}}{2}a_y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_x = -\frac{3\sqrt{3}}{13}a_y \\ \frac{27}{169}a_y^2 + a_y^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a_x = \pm\frac{3\sqrt{3}}{14} \\ a_y = \mp\frac{13}{14} \end{cases}.$$

Si hanno quindi i due vettori: $\quad \overline{a}_1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}\overline{i} - \dfrac{13}{14}\overline{j}\,, \quad \overline{a}_2 = -\overline{a}_1\,.$

ii) Se $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j}$ è un vettore incognito non nullo tale che $|\bar{b}| = 1$ e $\bar{b} \times (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \bar{0}$, si ha:

$$\begin{cases} b_x^2 + b_y^2 = 1 \\ \big(b_x \bar{i} + b_y \bar{j}\big) \times \left(\frac{13}{2}\bar{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\bar{j}\right) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b_x^2 + b_y^2 = 1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} b_x - \frac{13}{2} b_y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b_x = \pm\frac{13}{14} \\ b_y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{14} \end{cases}.$$

E quindi: $\quad \bar{b}_1 = \dfrac{13}{14}\,\bar{i} + \dfrac{3\sqrt{3}}{14}\,\bar{j}\,; \qquad \bar{b}_2 = -\bar{b}_1\,.$

<u>Metodo di soluzione alternativo</u>

i) Perchè il prodotto scalare di due vettori non nulli sia nullo occorre che i due vettori siano ortogonali. Essendo richiesto un versore $\bar{a}$ complanare con $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$, ci saranno due versori $\bar{a}_1$ e $\bar{a}_2$, l'uno opposto dell'altro, con questo requisito. Indicato con α l'angolo formato da $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ con l'asse x, sia $\bar{a}_1$ il versore normale a $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ che forma con l'asse x l'angolo $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Essendo

$$\Big|\bar{v}_1 + \bar{v}_2\Big| = \sqrt{\frac{169}{4} + \frac{27}{4}} = 7\,, \qquad \text{e quindi} \qquad \cos\alpha = \frac{\frac{13}{2}}{7} = \frac{13}{14}\,, \quad \sin\alpha = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{14}\,,$$

avremo

$$\bar{a}_1 = \cos\beta\,\bar{i} + \sin\beta\,\bar{j} = -\sin\alpha\,\bar{i} + \cos\alpha\,\bar{j} = -\frac{3\sqrt{3}}{14}\bar{i} + \frac{13}{14}\bar{j}\,, \qquad \bar{a}_2 = -\,\bar{a}_1\,.$$

ii) Perchè il prodotto vettoriale di due vettori non nulli sia nullo occorre che i due vettori siano paralleli. Di versori paralleli a $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ ne esistono due, l'uno opposto dell'altro:

$$\bar{b}_1 = \frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}{\big|\bar{v}_1 + \bar{v}_2\big|} = \cos\alpha\,\bar{i} + \sin\alpha\,\bar{j} = \frac{13}{14}\,\bar{i} + \frac{3\sqrt{3}}{14}\,\bar{j}\,; \qquad \bar{b}_2 = -\,\bar{b}_1\,.$$

Esercizio 1.8 *Dati i vettori $\bar{a}$ e $\bar{b}$, determinarne il modulo e l'angolo fra essi compreso sapendo che*

$$\big|\bar{a}\big| = \big|\bar{b}\big|\,, \qquad \big|\bar{a} \times \bar{b}\big| = 16\,, \qquad \big|\bar{a} + \bar{b}\big| = 4\,.$$

Indicato con α l'angolo tra $\bar{a}$ e $\bar{b}$ $(0 < \alpha < \pi)$, ricordando quanto vale il modulo di un prodotto vettoriale e quello della somma di due vettori (vedi esercizio 1.2), si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} a = b \\ a\,b \sin\alpha = 16 \\ a^2 + b^2 - 2a\,b\cos(\pi - \alpha) = 16 \end{cases} \implies \begin{cases} a = b \\ b^2 \sin\alpha = 16 \\ b^2(1 + \cos\alpha) = 8 \end{cases}.$$

Operando sulle due ultime equazioni ed utilizzando poi le formule trigonometriche

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}\,, \quad \cos\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\,, \quad \text{essendo} \quad t = \tan\frac{\alpha}{2}\,,$$

si ha

$$\sin\alpha = 2(1 + \cos\alpha) \implies \frac{2t}{1 + t^2} = 2\Big(1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\Big) \implies t = 2\,.$$

Di conseguenza:

$$t = 2 \implies \begin{cases} \sin\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos\alpha = -\frac{3}{5} \end{cases} \implies \alpha = \arctan\Big(-\frac{4}{3}\Big) \simeq 126.9^\circ\,, \quad a = b = 2\sqrt{5}\,.$$

Esercizio 1.9 *Nel riferimento cartesiano Oxyz sono dati i tre vettori piani seguenti:*

$$P - O = 2\,\overline{\imath} - 3\,\overline{\jmath}\,, \qquad Q - O = \sqrt{2}\,\overline{\imath} - \sqrt{3}\,\overline{\jmath}\,, \qquad R - O = -2\sqrt{2}\,\overline{\imath} + \overline{\jmath}\,.$$

Calcolare:

a) $\big(P-O\big)\cdot\big(Q-O\big)\,;$

b) $\big(P-O\big)\times\big(Q-O\big)\,;$

c) $\big(Q-O\big)\times\big(P-O\big)\,;$

d) $\big(P-O\big)\times\big(Q-O\big)\cdot\big(R-O\big)\,;$

e) $\big[\big(P-O\big)\times\big(Q-O\big)\big]\times\big(R-O\big)\,.$

f) $\big(R-O\big)\times\big[\big(Q-O\big)\times\big(P-O\big)\big]\,;$

Trattandosi di vettori piani conviene eseguire i prodotti vettoriali e misti con moltiplicazioni termine a termine. A tal fine ricordiamo le regole di moltiplicazione dei versori:

$\overline{\imath}\cdot\overline{\imath} = \overline{\jmath}\cdot\overline{\jmath} = \overline{k}\cdot\overline{k} = 1\,;$ $\qquad \overline{\imath}\cdot\overline{\jmath} = \overline{\jmath}\cdot\overline{\imath} = \overline{\jmath}\cdot\overline{k} = \overline{k}\cdot\overline{\jmath} = \overline{k}\cdot\overline{\imath} = \overline{\imath}\cdot\overline{k} = 0\,;$

$\overline{\imath}\times\overline{\imath} = \overline{\jmath}\times\overline{\jmath} = \overline{k}\times\overline{k} = \overline{0}\,;$ $\qquad \overline{\imath}\times\overline{\jmath} = -\overline{\jmath}\times\overline{\imath} = \overline{k}\,, \quad \overline{\jmath}\times\overline{k} = -\overline{k}\times\overline{\jmath} = \overline{\imath}\,, \quad \overline{k}\times\overline{\imath} = -\overline{\imath}\times\overline{k} = \overline{\jmath}\,.$

a) $\big(P-O\big)\cdot\big(Q-O\big) = \big(2\,\overline{\imath} - 3\,\overline{\jmath}\big)\cdot\big(\sqrt{2}\,\overline{\imath} - \sqrt{3}\,\overline{\jmath}\big) = 2\sqrt{2} + (-3)(-\sqrt{3}) = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}\,;$

b) $\big(P-O\big)\times\big(Q-O\big) = \big(2\,\overline{\imath} - 3\,\overline{\jmath}\big)\times\big(\sqrt{2}\,\overline{\imath} - \sqrt{3}\,\overline{\jmath}\big) = (-2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})\,\overline{k}\,;$

c) $\big(Q-O\big)\times\big(P-O\big) = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})\,\overline{k}\,;$ (essendo $\overline{a}\times\overline{b} = -\,\overline{b}\times\overline{a}$)

d)
$$\begin{aligned}\big(P-O\big)\times\big(Q-O\big)\cdot\big(R-O\big) &= \big(2\,\overline{\imath} - 3\,\overline{\jmath}\big)\times\big(\sqrt{2}\,\overline{\imath} - \sqrt{3}\,\overline{\jmath}\big)\cdot\big(-2\sqrt{2}\,\overline{\imath} + \overline{\jmath}\big) = \\ &= (-2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})\,\overline{k}\cdot\big(-2\sqrt{2}\,\overline{\imath} + \overline{\jmath}\big) = 0\,;\end{aligned}$$

(ovvio!!! il prodotto misto di tre vettori complanari è sempre nullo!!!)

e) Sfruttando il risultato ottenuto al punto b), abbiamo:

$$\begin{aligned}\big[\big(P-O\big)\times\big(Q-O\big)\big]\times\big(R-O\big) &= [(-2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})\,\overline{k}]\times(-2\sqrt{2}\,\overline{\imath} + \overline{\jmath}) = \\ &= -2\sqrt{2}(-2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})\,\overline{\jmath} - (-2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})\,\overline{\imath} = \\ &= (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})\,\overline{\imath} + (4\sqrt{6} - 12)\,\sqrt{\jmath}\,.\end{aligned}$$

In alternativa si poteva usare la formula $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c} = [\overline{a}\cdot\overline{c}]\,\overline{b} - [\overline{b}\cdot\overline{c}]\,\overline{a}$:

$$\begin{aligned}&\big[\big(P-O\big)\times\big(Q-O\big)\big]\times\big(R-O\big) = \big[\big(P-O\big)\cdot\big(R-O\big]\big(Q-O\big) - \big[\big(Q-O\big)\cdot\big(R-O\big]\big(P-O\big) = \\ &= \big[\big(2\,\overline{\imath} - 3\,\overline{\jmath}\big)\cdot\big(-2\sqrt{2}\,\overline{\imath} + \overline{\jmath}\big)\big]\big(\sqrt{2}\,\overline{\imath} - \sqrt{3}\,\overline{\jmath}\big) - \big[\big(\sqrt{2}\,\overline{\imath} - \sqrt{3}\,\overline{\jmath}\big)\big]\cdot\big(-2\sqrt{2}\,\overline{\imath} + \overline{\jmath}\big)\big]\big(2\,\overline{\imath} - 3\,\overline{\jmath}\big) = \\ &= \big(-4\sqrt{2} - 3\big)\big(\sqrt{2}\,\overline{\imath} - \sqrt{3}\,\overline{\jmath}\big) - \big(-4 - \sqrt{3}\big)\big(2\,\overline{\imath} - 3\,\overline{\jmath}\big) = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})\,\overline{\imath} + (4\sqrt{6} - 12)\,\sqrt{\jmath}\,.\end{aligned}$$

f) Il risultato è lo stesso del punto precedente. Infatti:

$$\begin{aligned}&\big(R-O\big)\times\big[\big(Q-O\big)\times\big(P-O\big)\big] = -\big[\big(Q-O\big)\times\big(P-O\big)\big]\times\big(R-O\big) = \\ &= -\big[-\big(P-O\big)\times\big(Q-O\big)\big]\times\big(R-O\big) = \big[\big(P-O\big)\times\big(Q-O\big)\big]\times\big(R-O\big)\,.\end{aligned}$$

Esercizio 1.10 *Nel riferimento cartesiano $Oxyz$ sono dati i tre vettori piani seguenti:*

$$P-O = 2\,\bar{i} + \bar{j}\,, \qquad Q-O = \sqrt{2}\,\bar{i} + 2\sqrt{2}\,\bar{j} + \bar{k}\,, \qquad R-O = -2\,\bar{i} - 4\,\bar{j} + \sqrt{2}\,\bar{k}\,.$$

Calcolare:

a) $(P-O)\cdot(Q-O)\,;$

b) $(P-O)\times(Q-O)\,;$

c) $(P-O)\times(Q-O)\cdot(R-O)\,;$

d) $(R-O)\cdot(Q-O)\times(P-O)\,;$

e) $\big[(P-O)\times(Q-O)\big]\times(R-O)\,;$

f) $(P-O)\times\big[(Q-O)\times(R-O)\big]\,.$

In questo esercizio, diversamente da quello precedente, i vettori sono nello spazio. Conviene quindi effettuare i prodotti vettoriali e misti utilizzando le loro espressioni tramite determinanti.

a) $$(P-O)\cdot(Q-O) = (2\,\bar{i}+\bar{j})\cdot(\sqrt{2}\,\bar{i}+2\sqrt{2}\,\bar{j}+\bar{k}) = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+0 = 4\sqrt{2}\,;$$

b) $$(P-O)\times(Q-O) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} - 2\,\bar{j} + 3\sqrt{2}\,\bar{k}\,;$$

c) $$(P-O)\times(Q-O)\cdot(R-O) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \\ -2 & -4 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 12\,;$$

oppure, utilizzando il risultato ottenuto in b):

$$(P-O)\times(Q-O)\cdot(R-O) = (\bar{i}-2\,\bar{j}+3\sqrt{2}\,\bar{k})\cdot(-2\,\bar{i}-4\,\bar{j}+\sqrt{2}\,\bar{k}) = -2+8+6 = 12\,;$$

d) $$(R-O)\cdot(Q-O)\times(P-O) = (R-O)\cdot\big[-(P-O)\times(Q-O)\big] =$$
$$= -(P-O)\times(Q-O)\cdot(R-O) = -12\,;$$ (si vedano le proprietà del prodotto misto)

e) Utilizzando il risultato visto in b):

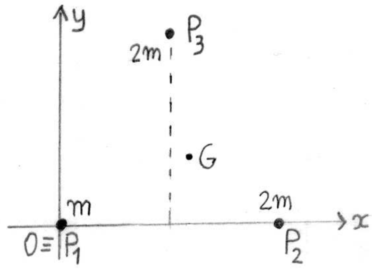
$$\big[(P-O)\times(Q-O)\big]\times(R-O) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3\sqrt{2} \\ -2 & -4 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 10\sqrt{2}\,\bar{i} - 7\sqrt{2}\,\bar{j} - 8\,\bar{k}\,.$$

f) $$(P-O)\times\big[(Q-O)\times(R-O)\big] = (2\,\bar{i}+\bar{j})\times\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \\ -2 & -4 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = (2\,\bar{i}+\bar{j})\times(8\bar{i}-4\,\bar{j}) = -16\,\bar{k}\,.$$

Non deve sorprendere il fatto che i due risultati ottenuti in e) ed in f) siano diversi. Si ricordi che in generale $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} \neq \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$.

Esercizio 2.1 *Calcolare il baricentro del sistema rigido costituito dai tre punti materiali (P_1, m), $(P_2, 2m)$, $(P_3, 2m)$ con P_1, P_2 e P_3 formanti un triangolo equilatero di lato ℓ.*

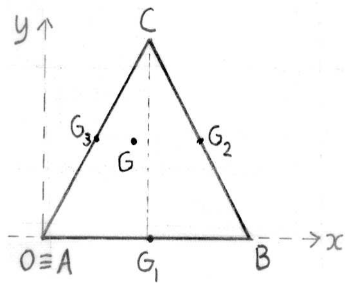
Sia Oxy il piano del triangolo, con $P_1{\equiv}O{\equiv}(0,0)$, $P_2{\equiv}(\ell,0)$ e $P_3{\equiv}(\frac{\ell}{2},\frac{\sqrt{3}\ell}{2})$. Applicando le (2.5), si ha



$$\begin{cases} x_G = \dfrac{m\cdot 0 + 2m\cdot\ell + 2m\cdot\frac{\ell}{2}}{5m} = \frac{3}{5}\ell\,, \\ y_G = \dfrac{m\cdot 0 + 2m\cdot 0 + 2m\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{5m} = \frac{\sqrt{3}}{5}\ell\,. \end{cases}$$

Esercizio 2.2 *Calcolare il baricentro del sistema costituito da tre aste rigide omogenee, di uguale lunghezza ℓ, ma di masse diverse: AB di massa $2m$; BC di massa m; CA di massa $3m$. Le tre aste sono disposte in modo da formare il triangolo equilatero ABC.*

Sia Oxy il piano del triangolo, con $A{\equiv}O{\equiv}(0,0)$, $B{\equiv}(\ell,0)$ e $C{\equiv}(\frac{\ell}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\ell)$. Essendo ciascuna asta omogenea, il relativo baricentro sta nel punto medio. Di conseguenza, indicati con G_1, G_2 e G_3 i baricentri rispettivamente di AB, BC e CA, il sistema materiale equivale al sistema di tre punti materiali $(G_1, 2m)$, (G_2, m), $(G_3, 3m)$, con $G_1{\equiv}(\frac{\ell}{2},0)$, $G_2{\equiv}(\frac{3}{4}\ell,\frac{\sqrt{3}}{4}\ell)$ e $G_3{\equiv}(\frac{1}{4}\ell,\frac{\sqrt{3}}{4}\ell)$. Applicando le (2.5), si ha

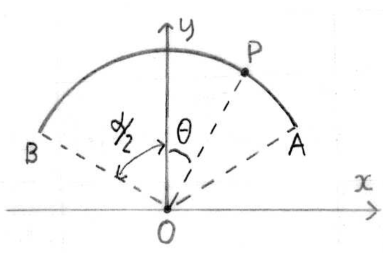


$$\begin{cases} x_G = \dfrac{2m\cdot\frac{\ell}{2} + m\cdot\frac{3}{4}\ell + 3m\cdot\frac{\ell}{4}}{6m} = \frac{5}{12}\ell\,, \\ y_G = \dfrac{2m\cdot 0 + m\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\ell + 3m\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\ell}{6m} = \frac{\sqrt{3}}{6}\ell\,. \end{cases}$$

<u>Esercizio</u>: *Dimostrare che il centro di massa di un sistema costituito da tre aste omogenee di uguale massa, unite in modo da formare un triangolo, coincide col baricentro geometrico del triangolo.*

Esercizio 2.3 *Calcolare il baricentro di un arco omogeneo di raggio R ed ampiezza α.*

Osserviamo innanzitutto che, se M è la massa dell'arco e ρ la sua densità (ovviamente costante), avremo $M{=}\rho\,\alpha R$. Osserviamo poi che, essendo l'arco omogeneo, l'asse della corda $\overline{AB}$ è un asse di simmetria. Di conseguenza il baricentro sta su tale asse. Sia Oxy il piano della circonferenza contenente l'arco, con O centro della circonferenza, l'asse y coincidente con l'asse di simmetria e l'asse x fissato di conseguenza.



In virtù della scelta del riferimento Oxy, si ha

$$x_G = 0\,.$$

Per calcolare y_G dobbiamo utilizzare la seconda delle (2.6). Indicato con P un generico punto dell'arco e con θ l'angolo $\widehat{yOP}$, si ha $-\frac{\alpha}{2} \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}$. L'elemento infinitesimo di massa dm che contiene il punto P vale $\rho\, R d\theta$; inoltre: $y_P = R\cos\theta$. Si ha quindi per y_G il seguente integrale curvilineo:

$$y_G = \frac{1}{M}\int_A^B y\, dm = \frac{1}{M}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \rho\, R^2\, \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{M}\rho\, R^2\Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{M}\rho\, R^2 \sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

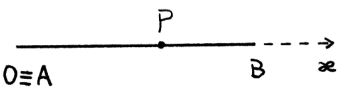
Infine, tenendo conto che $M = \rho\, R\alpha$, si ha

$$y_G = \frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}\,.$$

Osserviamo che, nel caso di una semicirconferenza ($\alpha{=}\pi$), si ha: $\quad y_G = \dfrac{2R}{\pi}\,.$

Esercizio 2.4 *Calcolare la massa ed il baricentro di un'asta AB di lunghezza ℓ e densità $\rho(x) = k(\ell + x)$, con x distanza da A.*

Sia Ox l'asse delle ascisse, con $O{\equiv}A$, come in figura. Osserviamo che, se P è un generico punto dell'asta, P ha ascissa x, con $0 \leq x \leq \ell$. Inoltre $dm = \rho(x)dx$.



Calcoliamo innanzitutto la massa M dell'asta.

$$M = \int_0^\ell \rho(x)dx = \int_0^\ell k(\ell + x)dx = k\Big[\ell x + \frac{x^2}{2}\Big]_0^\ell = \frac{3}{2}k\ell^2\,.$$

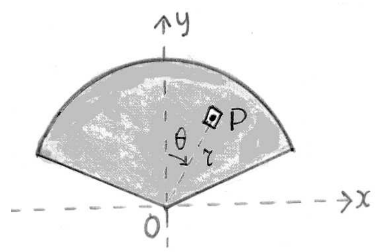
Applicando la prima delle (2.6) otteniamo:

$$x_G = \frac{1}{M}\int_0^\ell x\rho(x)dx = \frac{1}{M}\int_0^\ell kx(\ell + x)dx = \frac{k}{M}\Big[\ell\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big]_0^\ell = \frac{5k\ell^3}{6M} = \frac{5}{9}\ell\,.$$

Esercizio 2.5 *Calcolare il baricentro di un settore circolare omogeneo di raggio R e ampiezza α.*

Osserviamo innanzitutto che, se M è la massa del settore e ρ la sua densità (costante), essendo $\frac{\alpha R^2}{2}$ l'area del settore, si ha $M{=}\frac{\rho\,\alpha R^2}{2}$. Osserviamo poi che la retta contenente il raggio che divide il settore in due parti uguali è un asse di simmetria. Di conseguenza il baricentro sta su tale asse.

Sia Oxy il piano del cerchio di cui fa parte il settore, con O centro della circonferenza, l'asse y coincidente con l'asse di simmetria e l'asse x fissato di conseguenza. In base a questa scelta del riferimento Oxy, si ha



$$x_G = 0\,.$$

Per calcolare y_G dobbiamo utilizzare la seconda delle (2.6).

Indicato con P un generico punto del settore, con r la sua distanza da O e con θ l'angolo $\widehat{yOP}$, la coppia (r, θ) descrive il settore quando $0 \le r \le R$ e $-\frac{\alpha}{2} \le \theta \le \frac{\alpha}{2}$. L'elemento infinitesimo di massa dm che contiene il punto P è quindi dato da $\rho\, r\, dr\, d\theta$. Si ha quindi per y_G il seguente integrale di superficie:

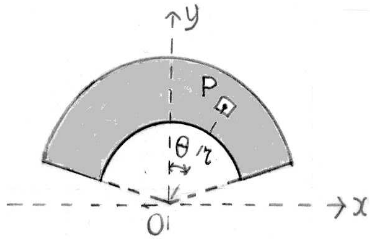
$$y_G = \frac{1}{M}\int_{\widehat{AOB}} y\, dm = \frac{1}{M}\int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \rho\, r^2 \cos\theta\, d\theta\, dr = \frac{1}{M}\rho\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \left[\sin\theta\right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\rho\, R^3}{3M}\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Infine, tenendo conto che $M = \frac{1}{2}\rho\, \alpha\, R^2$, si ha

$$y_G = \frac{4R}{3\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Caso del semicerchio: $\qquad \alpha = \pi \qquad \Longrightarrow \qquad y_G = \dfrac{4R}{3\pi}\,.$

Esercizio 2.6 *Calcolare il baricentro di un settore omogeneo di corona circolare di raggi R_1 ed R_2, con $R_1 < R_2$, ed ampiezza α.*



Chiaramente, l'area del settore di corona circolare vale quella del settore di raggio R_2 meno quella del settore di raggio R_1, ossia

$$\tfrac{1}{2}\alpha(R_2^2 - R_1^2)\,.$$

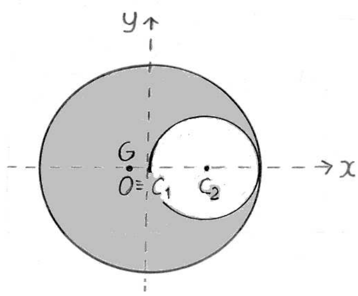
Quindi, se M è la massa del settore e ρ la sua densità (costante), l'area del settore di corona è

$$M = \tfrac{1}{2}\,\rho\, \alpha\, (R_2^2 - R_1^2)\,.$$

Adottando poi come nell'esercizio precedente le coordinate (r, θ), con la differenza che ora $R_1 \le r \le R_2$, e procedendo esattamente come prima, si ha ancora $x_G = 0$, mentre per y_G si ha

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{M}\int_{R_1}^{R_2}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \rho\, r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta = \frac{1}{M}\rho\left[\frac{r^3}{3}\right]_{R_1}^{R_2}\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{2\rho}{3M}(R_2^3 - R_1^3)\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{4(R_2^3 - R_1^3)}{3\alpha(R_2^2 - R_1^2)}\sin\frac{\alpha}{2}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2.7 *Calcolare il baricentro di un disco omogeneo di raggio R con un "buco" circolare di raggio $\frac{R}{2}$ con i due centri a distanza $\frac{R}{2}$.*



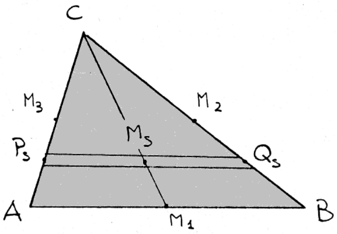
Siano C_1 e C_2 i centri del cerchio grande e del cerchio piccolo. Assumiamo un riferimento Oxy con O coincidente con C_1 e l'asse x coincidente con la congiungente C_1 e C_2, orientato verso C_2.

Consideriamo il buco come un disco omogeneo di massa negativa, con la stessa densità del disco pieno. In questo modo si calcola il baricentro del sistema costituito da due dischi omogenei e con la stessa densità ρ: uno di baricentro C_1 e massa $M_1 = \rho\,\pi\,R^2$, l'altro con baricentro in C_2 e massa $M_2 = -\rho\,\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2$. Naturalmente: $M = M_1 + M_2 = \frac{3}{4}\rho\,\pi\,R^2$.

Essendo Ox un asse di simmetria, si ha ovviamente $\quad y_G = 0$. Si ha poi

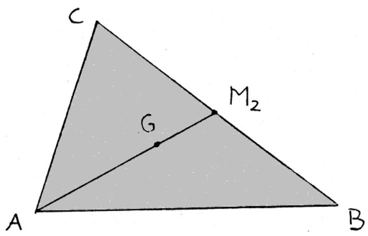
$$x_G = \frac{M_1 x_{C_1} + M_2 x_{C_2}}{M_1 + M_2} = \frac{\rho\,\pi\,R^2 \cdot 0 - \rho\,\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{R}{2}}{\frac{3}{4}\rho\,\pi\,R^2} = -\frac{1}{6}R\,.$$

Esercizio 2.8 *Dimostrare che il baricentro di un lamina triangolare omogenea coincide col baricentro geometrico.*



Sia ABC un triangolo e siano M_1, M_2 ed M_3 i punti medi dei lati $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ rispettivamente. Immaginiamo il triangolo suddiviso in infinite strisce parallele al lato $\overline{AB}$ e di spessore infinitesimo ds. La generica striscia può essere riguardata come un'asta P_sQ_s omogenea, il cui baricentro coincide col punto medio M_s. Per una proprietà delle mediane, M_s appartiene alla mediana $\overline{CM_1}$ relativa ad $\overline{AB}$. Il triangolo può dunque essere suddiviso in infinite strisce parallele ad $\overline{AB}$ i cui baricentri stanno tutti sulla mediana $\overline{CM_1}$. Ne consegue che anche il baricentro G del triangolo sta su $\overline{CM_1}$.

Il ragionamento può essere ripetuto anche pensando il triangolo suddiviso in strisce parallele a $\overline{BC}$ o $\overline{CA}$, nel qual caso si deduce che G deve appartenere anche alle altre due mediane $\overline{AM_2}$ e $\overline{BM_3}$. Pertanto il baricentro, dovendo stare su tutte tre le mediane, necessariamente coincide col loro punto d'intersezione, che per definizione è il baricentro geometrico del triangolo.

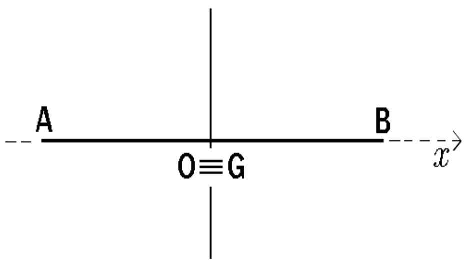


Sembra utile ricordare una importante proprietà geometrica del baricentro di un triangolo: **il baricentro divide ciascuna mediana in due parti, di cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra**. Ad esempio, facendo riferimento alla figura accanto, si ha: $\overline{AG} = 2\overline{GM_2}$.

Ricordiamo inoltre che dato il triangolo $P_1P_2P_3$ ed un riferimento Oxy nel suo piano, se (x_k, y_k) sono le coordinate di P_k, si ha

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\,, \qquad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\,.$$

Esercizio 2.9 *Calcolare il momento d'inerzia di un'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ rispetto ad un asse normale e baricentrico.*

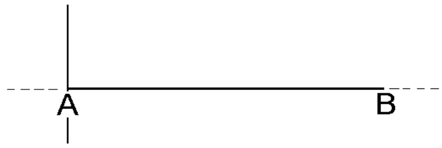


Sia AB l'asta ed Ox un asse che la contiene, con $O{\equiv}G$, punto medio di AB. Indicata con ρ la densità (costante) di massa, si ha $dm = \rho\,dx$. Pertanto (2.8), che in questo caso è un integrale curvilineo, diventa:

$$I_G = \int_{-\frac{\ell}{e}}^{\frac{\ell}{2}} x^2 \rho\,dx = \rho\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} = \frac{1}{12}\rho\,\ell^3\,.$$

Tenendo poi conto che $m = \rho\,\ell$, si ha: $\quad I_G = \dfrac{1}{12}m\ell^2\,.$

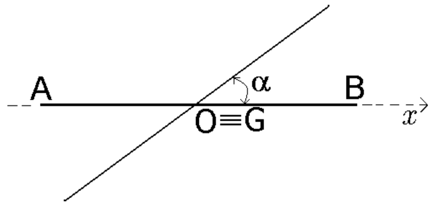
Esercizio 2.10 *Calcolare il momento d'inerzia dell'asta dell'esrcizio precedente rispetto ad un asse normale passante per un estremo.*



Ricordando il risultato dell'esercizio precedente ed applicando il teorema di Huyghens, si ha

$$I_A = I_G + md^2 = \frac{m\ell^2}{12} + m\Big(\frac{\ell}{2}\Big)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2 \,.$$

Esercizio 2.11 *Calcolare il momento d'inerzia dell'asta dell'esercizio 2.9 rispetto ad un asse baricentrico e formante un angolo α con l'asta.*



Procedendo esattamente come nell'esercizio 2.9, l'unico cambiamento riguarda la distanza del generico punto P dell'asta dall'asse: ora la distanza è $x\sin\alpha$. Si ha quindi:

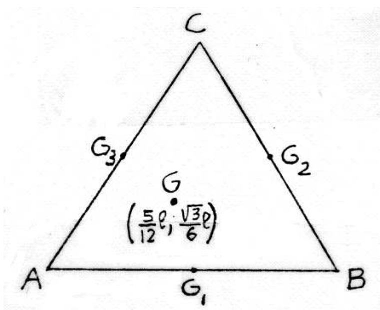
$$I_G = \int_{-\frac{\ell}{e}}^{\frac{\ell}{2}} x^2 \sin^2\!\alpha\rho\, dx = \rho\, \sin^2\!\alpha\, \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} = \frac{\rho\, \sin^2\!\alpha\, \ell^3}{12} = \frac{1}{12}m\ell^2 \sin^2\!\alpha \,.$$

Se l'asse, invece che baricentrico, passa per un estremo dell'asta, allora, applicando il teorema di Huyghens, si ottiene facilmente

$$I_A = \frac{1}{3}m\ell^2 \sin^2\!\alpha \,.$$

Si noti che questi risultati generalizzano quelli dei due esercizi precedenti, che si ottengono per $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 2.12 *Calcolare il momento d'inerzia del corpo rigido a forma triangolare costituito dalle tre aste dell'esercizio 2.2 rispetto all'asse normale e baricentrico e rispetto all'asse normale al triangolo e passante per il vertice A.*



Poniamo il triangolo equilatero ABC come nell'esercizio N. 2, col piano Oxy coincidente col piano del triangolo, O coincidente con A e il semiasse positivo delle x contenente AB. L'esercizio può essere risolto in più modi (chiaramente equivalenti). Noi procediamo calcolando prima il momento d'inerzia I_A rispetto all'asse normale passante per A. Avremo:

$$I_A = I_A(AB) + I_A(BC) + I_A(CA) \,.$$

Per quanto visto nell'esercizio 2.10, si ha poi

$$I_A(AB) = \frac{1}{3}2m\ell^2 = \frac{2}{3}m\ell^2 \,, \qquad\qquad I_A(CA) = \frac{1}{3}3m\ell^2 = m\ell^2 \,.$$

Per quanto concerne invece $I_A(BC)$, dobbiamo calcolarlo col teorema di Huyghens, sapendo che $\overline{AG_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$:

$$I_A(BC) = I_{G_2}(BC) + m(\overline{AG_2})^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{3}{4}\ell^2 = \frac{5}{6}m\ell^2 .$$

Dunque:

$$I_A = \frac{2}{3}m\ell^2 + m\ell^2 + \frac{5}{6}m\ell^2 = \frac{5}{2}m\ell^2 .$$

Per calcolare I_G basta applicare il teorema di Huyghens alla rovescia tenendo conto che la massa totale è $6m$ e che, essendo $G \equiv (\frac{5}{12}\ell, \frac{\sqrt{3}}{6}\ell)$ (vedi esercizio 2.2), si ha

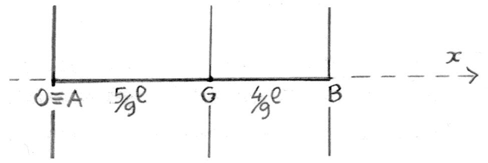
$$d^2 = \overline{AG}^2 = \Big(\frac{25}{144} + \frac{1}{12}\Big)\ell^2 = \frac{37}{144}\ell^2 .$$

Si ha quindi

$$I_G = I_A - (6m)d^2 = \frac{5}{2}m\ell^2 - 6m\frac{37}{144}\ell^2 = \frac{23}{24}m\ell^2 .$$

Esercizio 2.13 *Calcolare il momento d'inerzia dell'asta a densità variabile dell'esercizio 2.4 rispetto ad un asse normale e baricentrico e rispetto ai due assi normali e passanti per gli estremi.*

Sia AB l'asta di lunghezza ℓ e densità $\rho(x) = k(\ell+x)$, con x distanza da A. Essendo la x che compare nella densità la distanza da A, assumiamo come origine dell'asse delle x proprio A.



Conviene calcolare prima I_A e poi, utilizzando il teorema di Huyghens, calcolare I_G e quindi I_B.

$$I_A = \int_0^\ell x^2\rho(x)dx = \int_0^\ell kx^2(\ell + x)dx = k\Big[\ell\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\Big]_0^\ell = k\Big[\frac{\ell^4}{3} + \frac{\ell^4}{4}\Big] = \frac{7}{12}k\ell^4 ,$$

per cui, tenendo conto (come visto nell'esercizio 2.4) che la massa M dell'asta vale $\frac{3}{2}k\ell^2$, si ha

$$I_A = \frac{7}{18}M\ell^2 .$$

Per calcolare I_G, applichiamo il teorema di Huyghens (alla rovescia). Ricordando dall'esercizio 2.4, che $d = \overline{AG} = \frac{5}{9}\ell$, si ha

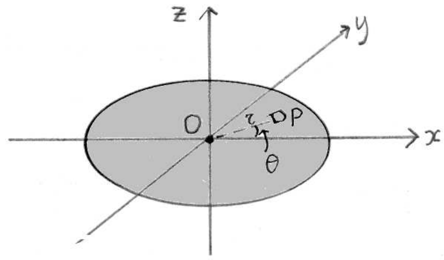
$$I_G = I_A - Md^2 = \frac{7}{18}M\ell^2 - \frac{25}{81}M\ell^2 = \frac{13}{162}M\ell^2 .$$

Infine calcoliamo I_B riapplicando il teorema di Huyghens (questa volta alla dritta), tenendo conto che ora $d = \overline{GB} = \frac{4}{9}\ell$:

$$I_B = I_G + Md^2 = \frac{13}{162}M\ell^2 + \frac{16}{81}M\ell^2 = \frac{5}{18}M\ell^2 .$$

Esercizio 2.14 *Calcolare i momenti d'inerzia di un disco omogeneo $\mathcal{D}$ di massa M e raggio R rispetto all'asse baricentrico normale e rispetto ad un asse baricentrico complanare.*

Analogamente al problema 2.5, sia Oxy il piano del disco $\mathcal{D}$, con O centro di $\mathcal{D}$ e (r,θ) le coordinate polari di un suo generico punto P, con $\theta = \widehat{xOP}$ ed $r = \overline{OP}$. La coppia (r,θ) descrive $\mathcal{D}$ quando $0 \le r \le R$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. L'elemento infinitesimo di massa dm che contiene il punto P è quindi dato da $\rho\, r\, d\theta\, dr$, mentre $M = \rho\,\pi\, R^2$.



Ciò premesso, il momento rispetto all'asse normale, che indichiamo con I_z, vale:

$$I_z = \int_{\mathcal{D}} r^2 dm = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho\, r^3 d\theta\, dr = \rho \Big[\theta\Big]_0^{2\pi} \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^R = \frac{1}{2}\rho\,\pi\, R^4 = \frac{1}{2} M R^2 .$$

Calcoliamo ora il momento d'inerzia I_x rispetto all'asse x. Per ovvi motivi di simmetria, il momento è lo stesso qualunque sia l'asse per O e giacente nel piano xy. In particolare, $I_x = I_y$.

Il calcolo è del tutto analogo a quello appena affrontato per I_z: l'unica differenza è che la distanza di P dall'asse ora vale $r \sin\theta$. Si ha dunque:

$$I_x = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho\, r^3 \sin^2\theta\, d\theta\, dr = \rho \Big[\frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta)\Big]_0^{2\pi} \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^R = \frac{1}{4}\rho\,\pi\, R^4 = \frac{1}{4} M R^2 .$$

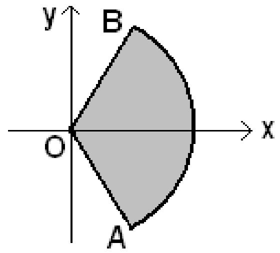
Osserviamo che I_x poteva essere calcolato in modo immediato da I_z in virtù della (2.20). Si ha infatti:

$$I_z = I_x + I_y = 2 I_x \qquad \Longrightarrow \qquad I_x = \frac{1}{2} I_z .$$

Osservazione importante. Il momento I_z può essere calcolato in modo diverso, e meno convenzionale, considerando come elemento infinitesimo di superficie una corona circolare di "spessore" infinitesimo dr e raggio r, con $0 \le r \le R$. In tal caso, essendo $d\sigma = 2\pi r\, dr$, si ha:

$$I_z = \int_{\mathcal{D}} r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho\,(2\pi r\, dr) = 2\pi\,\rho \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^R = \frac{1}{2}\rho\,\pi\, R^4 = \frac{1}{2} M R^2 .$$

Esercizio 2.15 *Si consideri una lamina piana omogenea, di massa M e con la forma di un settore circolare di centro O, raggio R e angolo α. Si chiede di calcolarne la matrice d'inerzia rispetto alla terna $Oxyz$, con Ox asse di simmetria della figura e Oz asse normale alla lamina.*



Calcoliamo per primo $C \equiv I_z$. L'integrale è lo stesso dell'esercizio precedente con la differenza che ora l'angolo θ varia tra $-\frac{\alpha}{2}$ e $\frac{\alpha}{2}$ invece che fra 0 e 2π. Ricordando poi che ora $M = \frac{1}{2}\rho\,\alpha R^2$, , si ha

$$C = I_z = \int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \rho\, r^3 d\theta\, dr = \rho \Big[\theta\Big]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^R = \frac{1}{4}\rho\,\alpha\, R^4 = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\rho\,\alpha\, R^2\Big) R^2 = \frac{1}{2} M R^2 .$$

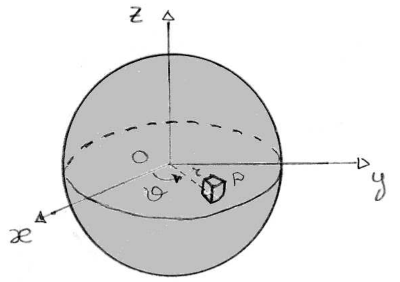
Osservato che C ha la stessa espressione sia per un disco che per un settore, calcoliamo $A \equiv I_x$.

$$A = \int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \rho\, r^3 \sin^2\theta d\theta dr = \rho \Big[\frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta)\Big]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^R = \frac{1}{8}\rho\,(\alpha - \sin\alpha) R^4 = \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\Big) M R^2 .$$

Essendo poi $A + B = C$, avremo: $\quad B = \dfrac{1}{4}\Big(1 + \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\Big) M R^2 .$

Si noti che per $\alpha = \pi$ si ha $\quad A = B = \frac{1}{2}C = \frac{1}{4}MR^2$ (come facilmente giustificabile).

Esercizio 2.16 *Calcolare il momento d'inerzia di una sfera omogenea $\mathcal{S}$ di massa M e raggio R rispetto ad un suo diametro.*



Ovviamente, per ragioni di simmetria, il momento d'inerzia è lo stesso qualunque sia il diametro. Scegliamo dunque un sistema di riferimento $Oxyz$ con origine nel centro O della sfera e calcoliamo I_z. Indicando con ρ la densità (costante) si ha

$$I_z = \rho \int_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) dx dy dz \,.$$

Il calcolo di questo integrale di volume risulta semplificato passando alle coordinate cilindriche r, θ e z. Tenendo conto che rispetto a queste l'elemento infinitesimo di volume diventa $r d\theta dr dz$ e che $x^2 + y^2 = r^2$, l'integrale e il relativo calcolo diventano come segue:

$$\begin{aligned}
I_z &= \rho \int_{\mathcal{S}} r^3 d\theta dr dz = \rho \int_0^{2\pi} \left(\int_{-R}^{R} \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} r^3 dr \right) dz \right) d\theta = \\
&= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-R}^{R} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3 dr \right) dz = \frac{1}{2} \rho\pi \int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz = \\
&= \frac{1}{2} \rho\pi \Big[R^4 z - \frac{2}{3} R^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \Big]_{-R}^{R} = \rho\pi \Big[1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \Big] R^5 = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 = \\
&= \frac{8}{15} \pi \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right) R^5 = \frac{2}{5} M R^2 \,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.17 *Calcolare il momento d'inerzia polare di una sfera omogenea $\mathcal{S}$ di massa M e raggio R rispetto al suo centro O e utilizzarlo per ottenere il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per O* (riottenendo così il risultato appena trovato nell'esercizio precedente).

Indichiamo con $\mathcal{J}_O$ il momento polare rispetto ad O. Per definizione abbiamo

$$\mathcal{J}_O = \rho \int_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \,.$$

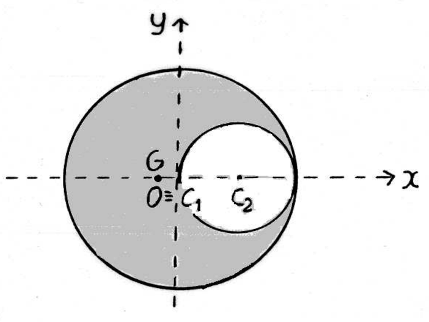
Questo integrale si calcola facilmente adottando una tecnica analoga a quella già usata per il secondo calcolo di I_z nell'esercizio 2.14. Considerando infatti come elemento infinitesimo di volume una superficie sferica di raggio r e "spessore" infinitesimo dr, ossia $4\pi r^2 dr$, si ha

$$\mathcal{J}_O = \rho \int_0^R r^2 \big(4\pi r^2 dr \big) = \frac{4}{5} \pi \rho R^5 = \frac{4}{5} \pi \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right) R^5 = \frac{3}{5} M R^2 \,.$$

Ora, tenendo conto di quanto visto nel §2.7, si ha

$$\mathcal{J}_O = \frac{1}{2} \big(A + B + C \big) = \frac{3}{2} I_z \,, \qquad \text{da cui segue} \qquad I_z = \frac{2}{3} \mathcal{J}_O = \frac{2}{5} M R^2 \,.$$

Esercizio 2.18 *Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico e normale di un disco omogeneo di raggio R e massa M, con un "buco" circolare di raggio $\frac{R}{2}$ e i due centri a distanza $\frac{R}{2}$.*



Indicati con C_1 e C_2 i centri del cerchio grande e del cerchio piccolo e assunto un riferimento $Oxyz$ con Oxy coincidente col piano del disco, O coincidente con C_1 e l'asse x coincidente con la congiungente C_1 e C_2 (orientato verso C_2), dall'esercizio 2.7 sappiamo già che $G \equiv (-\frac{1}{6}R, 0)$. Calcoliamo separatamente i momenti d'inerzia rispetto all'asse $(G, \overline{k})$ del disco disco pieno e del disco vuoto. Indichiamo con $I^z_{\mathcal{DP}}(G)$ e $I^z_{\mathcal{DV}}(G)$ tali momenti, adottando analoga notazione per il momento del disco pieno rispetto all'asse per C_1 e del disco vuoto rispetto all'asse per C_2. Tenuto conto che il disco pieno avrebbe massa $\frac{4}{3}M$ e il disco vuoto massa $-\frac{1}{3}M$, si ha:

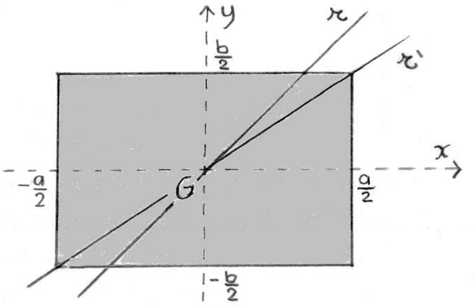
$$I^z_{\mathcal{DP}}(G) = I^z_{\mathcal{DP}}(C_1) + \frac{4}{3}M\,\overline{C_1G}^2 = \frac{1}{2}\frac{4}{3}MR^2 + \frac{4}{3}M\,\frac{R^2}{36} = \frac{19}{27}MR^2\,;$$
$$I^z_{\mathcal{DV}}(G) = I^z_{\mathcal{DV}}(C_2) + \Big(-\frac{M}{3}\Big)\overline{C_2G}^2 = \frac{1}{2}\Big(-\frac{M}{3}\Big)\Big(\frac{R}{2}\Big)^2 + \Big(-\frac{M}{3}\Big)\Big(\frac{2}{3}R\Big)^2 = -\frac{41}{216}MR^2\,,$$

e quindi

$$I^z(G) \quad = I^z_{\mathcal{DP}}(G) + I^z_{\mathcal{DV}}(G) = \frac{19}{27}MR^2 - \frac{41}{216}MR^2 = \frac{37}{72}MR^2\,.$$

Nota bene: i momenti d'inerzia sono sempre positivi! Il fatto di averne ottenuto uno negativo è dovuto all'artificio matematico di attribuire una massa negativa ad un "buco".

Esercizio 2.19 *Calcolare i momenti centrali di una lamina rettangolare omogenea $\mathcal{R}$ di massa M e lati a e b.*



I momenti centrali sono i momenti principali d'inerzia di un corpo rigido rispetto al baricentro. Nel caso della lamina in questione gli assi principali d'inerzia per G, in virtù del teorema visto nel §2.6, teorema che stabilisce che un asse perpendicolare per O_1 ad un piano di simmetria geometrico-materiale è principale d'inerzia, sono le due rette parallele ai lati e la perpendicolare alla lamina. Considerato pertanto il riferimento $Gxyz$, con l'asse x parallelo ai lati di lunghezza a, l'asse y parallelo a quelli di lunghezza b e l'asse z normale alla lamina, i tre momenti centrali A, B e C sono i momenti rispetto agli assi x, y e z. Calcoliamoli supponendo, come al solito, che la densità di massa sia ρ, per cui $M = \rho ab$.

$$A = \int_{\mathcal{R}} y^2 dm = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dydx = \rho\Big[x\Big]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big[\frac{y^3}{3}\Big]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \rho a\frac{b^3}{12} = \frac{1}{12}Mb^2$$
$$B = \int_{\mathcal{R}} x^2 dm = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dydx = \rho\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big[y\Big]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \rho\frac{a^3}{12}b = \frac{1}{12}Ma^2$$
$$C = \int_{\mathcal{R}} (x^2+y^2) dm = \rho\bigg(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dydx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dydx\bigg) = B + A = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

Esercizio 2.20. *Scrivere l'equazione dell'ellissoide centrale della lamina dell'esercizio precedente ed utilizzarla per calcolare i momenti d'inerzia rispetto alla retta r (bisettrice) ed r' (diagonale) disegnate nella figura dell'esercizio precedente.*

L'equazione dell'ellissoide centrale è data dalla (2.19) con A, B e C ricavati nell'esercizio precedente. L'equazione (il sistema solidale qui è $Oxyz$ anzichè $O_1x_1y_1z_1$) è quindi la seguente:

$$\frac{Mb^2}{12}x^2 + \frac{Ma^2}{12}y^2 + \frac{M}{12}(a^2+b^2)z^2 = 1\,.$$

Per calcolare il momento d'inerzia rispetto alla retta r, calcoliamo i punti d'intersezione L_1 ed L_2 di r con l'ellissoide. A tal fine, mettendo a sistema le equazioni della retta con quella dell'ellissoide,

$$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ \frac{Mb^2}{12}x^2 + \frac{Ma^2}{12}y^2 + \frac{M}{12}(a^2+b^2)z^2 = 1\,. \end{cases}$$

si ottiene: $\quad x_L^2 = y_L^2 = \dfrac{12}{M(a^2+b^2)}\,, \quad z_L = 0\,.$ Da ciò consegue

$$\overline{OL}^2 = x_L^2 + y_L^2 = \frac{24}{M(a^2+b^2)} \qquad \text{e quindi} \qquad I_r = \frac{1}{\overline{OL}^2} = \frac{1}{24}M(a^2+b^2)\,.$$

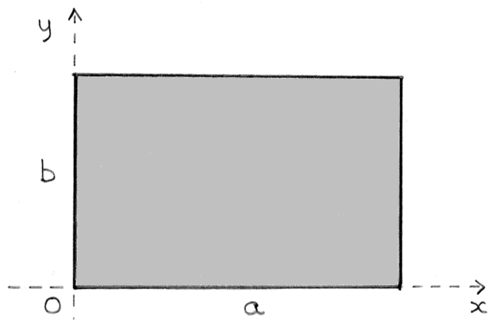
Per calcolare $I_{r'}$ si procede allo stesso modo, cambiando ovviamente l'equazione della retta:

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ z = 0 \\ \frac{Mb^2}{12}x^2 + \frac{Ma^2}{12}y^2 + \frac{M}{12}(a^2+b^2)z^2 = 1\,. \end{cases}$$

Il sistema fornisce: $\quad x_L^2 = \dfrac{6}{Mb^2}\,, \quad y_L^2 = \dfrac{6}{Ma^2}\,, \quad z_L = 0\,, \quad$ e quindi $\quad I_{r'} = \dfrac{M}{6}\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}\,.$

Esercizio 2.21 *Scrivere la matrice d'inerzia e l'equazione dell'ellissoide per la lamina dei due esercizi precedenti rispetto ad un vertice.*

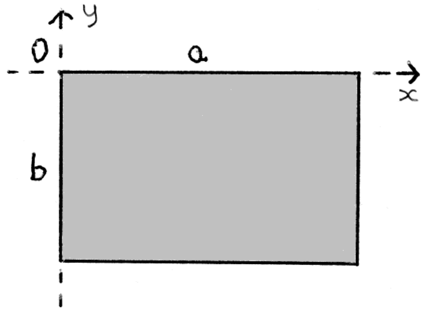
Osserviamo innanzitutto che il testo dell'esercizio non precisa il sistema di riferimento $Oxyz$ rispetto al quale calcolare la matrice d'inerzia, ma solo la sua origine. Assumiamo dunque come riferimento quello più naturale, cioè quello con il piano xy coincidente col piano della lamina e gli assi x e y diretti ed orientati con i lati della lamina, come in figura.



Ricordando che tutti i punti della lamina hanno $z = 0$, calcoliamo i coefficienti della matrice d'inerzia.

$$A = \rho\int_0^a\int_0^b y^2 dydx = \rho\Big[x\Big]_0^a\Big[\frac{y^3}{3}\Big]_0^b = \rho a\frac{b^3}{3} = \frac{1}{3}Mb^2\,;$$
$$B = \rho\int_0^a\int_0^b x^2 dydx = \rho\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^a\Big[y\Big]_0^b = \rho\frac{a^3}{3}b = \frac{1}{3}Ma^2\,;$$

$$C=\rho\int_0^a\int_0^b (x^2+y^2)dydx=\rho\bigg(\int_0^a\int_0^b x^2dydx+\int_0^a\int_0^b y^2dydx\bigg)=B+A=\frac{1}{3}M(a^2+b^2)\,;$$
$$A'=\rho\int_0^a\int_0^b xydydx=\rho\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^a\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^b=\rho\frac{a^2}{2}\frac{b^2}{2}=\frac{1}{4}Mab\,;$$
$$B'=\rho\int_0^a\int_0^b xzdydx=0\,;\qquad C'=\rho\int_0^a\int_0^b yzdydx=0\,.$$
Osservato che il risultato $B'=C'=0$ è un'ovvia conseguenza del fatto che l'asse Oz è principale d'inerzia (per cui si poteva anche evitare di scrivere gli integrali), scriviamo l'equazione dell'ellissoide:
$$\frac{Mb^2}{3}x^2+\frac{Ma^2}{3}y^2+\frac{M(a^2+b^2)}{3}z^2-\frac{Mab}{2}xy=1\,.$$
Si noti che i momenti principali A, B e C potevano essere calcolati in modo immediato da quelli centrali calcolati nel precedente esercizio applicando il teorema di Huyghens. Infatti:
$$A=\frac{1}{12}Mb^2+M\Big(\frac{b}{2}\Big)^2=\frac{1}{3}Mb^2\,;$$
$$B=\frac{1}{12}Ma^2+M\Big(\frac{a}{2}\Big)^2=\frac{1}{3}Ma^2\,;$$
$$C=\frac{1}{12}M(a^2+b^2)+M\Big[\big(\frac{a}{2}\big)^2+\big(\frac{b}{2}\big)^2\Big]=\frac{1}{3}M(a^2+b^2)\,.$$
Analogamente A' poteva essere calcolato direttamente con la prima delle formule (2.22). Essendo $G\equiv\big(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\big)$, si ha immediatamente
$$A'=Mx_G\,y_G=M\frac{a}{2}\frac{b}{2}=\frac{1}{4}Mab\,.$$
A volte però, quando si ha a che fare con una lamina ottenuta saldando assieme più lamine rettangolari, ci si può trovare nella situazione di dover calcolare la matrice d'inerzia rispetto ad un riferimento posto, rispetto alla lamina, come nella figura accanto.

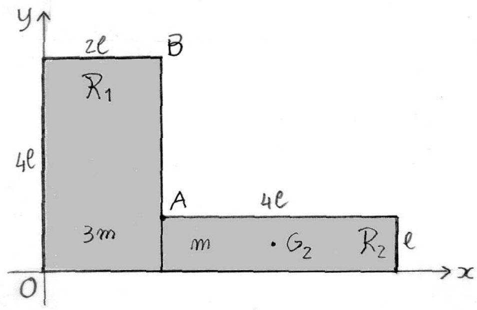


È evidente che per quanto riguarda i momenti d'inerzia A, B e C, dipendendo questi dalle distanze dei punti del corpo dall'asse (per giunta al quadrato), nulla cambia. I momenti di deviazione però, dipendendo dai prodotti delle coordinate dei punti, possono cambiare diventando negativi. Naturalmente, se l'asse Oz è principale d'inerzia, come nel nostro caso, in ogni caso si ha $B'=C'=0$. Dunque, nel problema in questione, l'unico elemento della matrice d'inerzia che cambia è A', che cambia segno. È facile verificare ciò ripetendo il calcolo dell'integrale.
$$A'=\rho\int_0^a\int_{-b}^0 xydydx=\rho\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^a\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{-b}^0=\rho\frac{a^2}{2}\Big(-\frac{(-b)^2}{2}\Big)=-\rho\frac{a^2b^2}{4}=-\frac{1}{4}Mab\,.$$
Ovviamente si perviene allo risultato, però in modo molto più rapido, utilizzando la prima delle (2.22). Essendo $G\equiv\big(\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\big)$, si ha infatti
$$A'=Mx_G\,y_G=M\frac{a}{2}\big(-\frac{b}{2}\big)=-\frac{1}{4}Mab\,.$$

Esercizio 2.22. *Si consideri la figura rigida piana $\mathcal{P}$ ottenuta saldando assieme, come in figura, le due lamine rettangolari omogenee $\mathcal{R}_1$ ed $\mathcal{R}_2$, con $\mathcal{R}_1$ di massa $3m$ e lati 2ℓ e 4ℓ ed $\mathcal{R}_2$ di massa m e lati 4ℓ ed ℓ. Scelto il riferimento $Oxyz$ come in figura, si chiede di determinare:*

a) la matrice d'inerzia di $\mathcal{P}$ rispetto ad O e al riferimento $Oxyz$;

b) il momento d'inerzia di $\mathcal{P}$ rispetto alle rette OA e OB.



Indicati rispettivamente con $A_O(\mathcal{P})$, $B_O(\mathcal{P})$ e $C_O(\mathcal{P})$ i momenti d'inerzia di $\mathcal{P}$ rispetto agli assi Ox, Oy e Oz, e analogamente con $A_O(\mathcal{R}_1)$, $B_O(\mathcal{R}_1)$ e $C_O(\mathcal{R}_1)$ quelli di $\mathcal{R}_1$ e con $A_O(\mathcal{R}_2)$, $B_O(\mathcal{R}_2)$ e $C_O(\mathcal{R}_2)$ quelli di $\mathcal{R}_2$, si ha

$$\begin{aligned} A_O(\mathcal{P}) &= A_O(\mathcal{R}_1) + A_O(\mathcal{R}_2) \\ B_O(\mathcal{P}) &= B_O(\mathcal{R}_1) + B_O(\mathcal{R}_2) \\ C_O(\mathcal{P}) &= C_O(\mathcal{R}_1) + C_O(\mathcal{R}_2)\,. \end{aligned}$$

Inoltre, in virtù del fatto che, essendo la lamina piana, il piano Oxy è di simmetria per la stessa lamina, l'asse Oz è principale d'inerzia. Di conseguenza, essendo $B' = C' = 0$, l'unico momento di deviazione da calcolare è A'. Naturalmente, adottata per i momenti di deviazione una simbologia analoga, anche per A' si avra'

$$A'_O(\mathcal{P}) = A'_O(\mathcal{R}_1) + A'_O(\mathcal{R}_2)\,.$$

Ora, ricordando l'espressione dei momenti di una lamina rettangolare omogenea di massa M e lati a e b (ottenuti nell'esercizio 2.21) rispetto ad una terna di assi con l'origine coincidente con un vertice della lamina e gli assi x e y contenenti rispettivamente i lati di lunghezza a e b, si ha

$$\begin{aligned} A_O(\mathcal{R}_1) &= \frac{M}{3}b^2 = \frac{3m}{3}(4\ell)^2 = 16m\ell^2 \\ B_O(\mathcal{R}_1) &= \frac{M}{3}a^2 = \frac{3m}{3}(2\ell)^2 = 4m\ell^2 \\ C_O(\mathcal{R}_1) &= A_O(\mathcal{R}_1) + B_O(\mathcal{R}_1) = 20m\ell^2 \\ A'_O(\mathcal{R}_1) &= \frac{M}{4}ab = \frac{3m}{4}(2\ell)(4\ell) = 6m\ell^2\,. \end{aligned}$$

Il calcolo degli analoghi momenti per la lamina $\mathcal{R}_2$ risulta un po' più elaborato in quanto l'origine O del riferimento non coincide più con un vertice della lamina e l'asse y non contiene più il lato ad esso parallelo (mentre l'asse x lo contiene). Procederemo dunque come prima per il calcolo di $A_O(\mathcal{R}_2)$ e $C_O(\mathcal{R}_2)$, mentre per calcolare $B_O(\mathcal{R}_2)$ calcoleremo prima $B_{G_2}(\mathcal{R}_2)$ (G_2 è il baricentro di $\mathcal{R}_2$) e applicheremo poi il teorema di Huyghens. Per quanto riguarda invece il calcolo di $A'_O(\mathcal{R}_2)$, ricorreremo sia alla definizione che alla prima delle (2.22).

$$\begin{aligned} A_O(\mathcal{R}_2) &= \frac{M}{3}b^2 = \frac{m}{3}(\ell)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2 \\ B_O(\mathcal{R}_2) &= B_{G_2}(\mathcal{R}_2) + Md^2 = \frac{m}{12}(4\ell)^2 + m(4\ell)^2 = \frac{52}{3}m\ell^2 \\ C_O(\mathcal{R}_2) &= A_O(\mathcal{R}_2) + B_O(\mathcal{R}_2) = \frac{53}{3}m\ell^2 \\ A'_O(\mathcal{R}_2) &= \rho\int_{2\ell}^{6\ell} x dx \int_0^{\ell} y dy = \rho\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{2\ell}^{6\ell}\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\ell} = 8\rho\ell^4 = 2(4\rho\ell^2)\ell^2 = 2m\ell^2\,. \end{aligned}$$