Rolf Unbehauen · Willi Hohneker

Elektrische Netzwerke Aufgaben

Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage

Ausführlich durchgerechnete
und illustrierte Aufgaben mit Lösungen zu
Unbehauen, Elektrische Netzwerke, 3. Auflage

Mit 98 Abbildungen in 259 Einzeldarstellungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg NewYork
London Paris Tokyo 1987

Dr.-Ing. ROLF UNBEHAUEN

o. Professor, Lehrstuhl für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik
der Universität Erlangen-Nürnberg

Dr.-Ing. WILLI HOHNEKER

Lehrstuhl für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik
der Universität Erlangen-Nürnberg

1. Auflage 1981 erschien unter gleichem Titel als *Hochschultext.*

ISBN-13: 978-3-540-17110-2 e-ISBN-13: 978-3-642-95507-5
DOI: 10.1007/978-3-642-95507-5

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Unbehauen, Rolf
Elektrische Netzwerke: Aufgaben
2., neubearbeitete und erweiterte Auflage
Ausführlich durchgerechnete und illustrierte Aufgaben mit Lösungen zu
Unbehauen, Elektrische Netzwerke, 3. Auflage
Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer 1987

NE: Hohneker, Willi

2362/3020-543210

Vorwort

Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten dadurch, daß in die bereits vorhandenen Kapitel zusätzliche Aufgaben mit Lösungen aufgenommen wurden (Aufgaben 3.9, 4.9 und 5.17) und ein neues siebtes Kapitel hinzugekommen ist, das der Analyse elementarer nichtlinearer Netzwerke und linearer Netzwerke mit verteilten Parametern — entsprechend dem Lehrstoff von Kapitel 7 aus „Elektrische Netzwerke" (EN) — Rechnung trägt. Darüber hinaus wurden Formeln und Größen, die für die Bearbeitung von Aufgaben nützlich sein können, in einem Anhang zusammengestellt. Schließlich sei noch erwähnt, daß einige wenige Korrekturen vorgenommen und die Verweise auf „Elektrische Netzwerke", soweit erforderlich, an die dritte Auflage dieses Buches angeglichen wurden. Es ist zu wünschen, daß die Leser weiterhin reichen Nutzen aus der vorliegenden Sammlung von Aufgaben mit Lösungen ziehen mögen.

Erlangen, im März 1987 | Die Verfasser

Vorwort zur ersten Auflage

Die vorliegende Sammlung von Aufgaben mit Lösungen ist in der Absicht entstanden, Studenten im Rahmen ihrer Grundausbildung auf dem Gebiet der Elektrotechnik zu aktiver Mitarbeit anzuregen. Nach dem Studium des eigentlichen Lehrstoffs bringt erfahrungsgemäß erst die Beschäftigung mit Übungsaufgaben volles Verständnis der Sachverhalte und tiefere Einsicht in die Zusammenhänge. Darüber hinaus wird durch die Bearbeitung von Aufgaben die Fähigkeit entwickelt, die gewonnenen theoretischen Erkenntnisse bei der Lösung praktischer Problemstellungen anzuwenden.
Der Inhalt der Aufgaben lehnt sich eng an das im gleichen Verlag erschienene Buch „Elektrische Netzwerke" (hier mit „EN" abgekürzt) an. Die Mehrzahl der Aufgaben dürfte aber unabhängig von diesem Lehrbuch didaktische Bedeutung haben. Die Aufgaben wurden in den Übungen und schriftlichen Klausuren zum Fach „Grundlagen der Elektrotechnik" an der Universität Erlangen-Nürnberg erprobt. Die Sammlung ist entsprechend der Kapiteleinteilung von EN gegliedert, wobei das Kapitel „Ausblick" unberücksichtigt blieb. Andererseits wird der Lehrstoff durch einige Aufgaben, beispielsweise zum Leitungsmechanismus in Halbleitern und zur grundsätzlichen Funktionsweise von Gleichstrommaschinen, bis zu einem gewissen Grad gegenüber der Darstellung in EN erweitert. Bezüglich der Bedeutung des in den einzelnen Kapiteln behandelten Lehrstoffs wird auf das Vorwort von EN verwiesen.
Dem Benutzer dieses Buches wird empfohlen, bei der Bearbeitung der einzelnen Aufgaben zunächst jeweils den Text ohne die Lösung zu studieren. Letztere sei dem Vergleich mit der eigenen Lösung vorbehalten. Soweit die Aufgaben einen nicht unmittelbar erkennbaren praktischen Hintergrund haben, wird hierauf an entsprechender Stelle der Lösungen hingewiesen.
Allen an der Entstehung des vorliegenden Buches beteiligten Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern am Lehrstuhl für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik der Universität Erlangen-Nürnberg möchten die Verfasser an dieser Stelle herzlich danken. Besonderer Dank gilt neben Herrn Dipl.-Phys. R. Kröger, der durch konstruktive Kritik einen wichtigen Beitrag geleistet hat, vor allem Frau K. Syptroth für die Reinschrift des gesamten Textes, Frau R. Dittrich für das Anfertigen der Bilder und Frau A. Obermayer für die Montage der Formeln und Textteile. Dem Springer-Verlag sei für die gute Zusammenarbeit gedankt.

Erlangen, August 1980 Die Verfasser

Inhalt

1. Grundlagen

Dieses Kapitel enthält Aufgaben zum Stoffgebiet Physikalische Grundlagen der Netzwerktheorie, Aufgaben zur Behandlung von Elementen elektrischer Schaltungen sowie zur Untersuchung einfacher Netzwerke.
Die Aufgaben, welche die physikalischen Grundlagen betreffen, beinhalten folgende Themen:
- Aus der Elektrostatik die Berechnung des elektrischen Feldes, das von vorgegebenen konstanten Ladungsverteilungen hervorgerufen wird (Aufgaben 1-3),
- aus der Magnetostatik die Berechnung des von Gleichströmen erzeugten magnetischen Feldes und die dabei auftretenden Kräfte (Aufgaben 11, 14),
- Anwendung des Durchflutungs- und des Induktionsgesetzes (Aufgaben 12, 13),
- elektrische Strömung in Metallen (Aufgaben 4, 5),
- Leitungsmechanismus in Halbleitern (Aufgaben 6-10).

Aus dem Bereich der Elemente elektrischer Schaltungen findet man Aufgaben
- zur Dimensionierung von Spule und Kondensator (Aufgaben 15, 16),
- zur Beschreibung des Verhaltens von Gleichstrom-Generatoren und Gleichstrom-Motoren (Aufgaben 18-20).

Die Aufgaben zur Untersuchung einfacher Netzwerke betreffen
- den Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an Induktivität und Kapazität (Aufgaben 17, 22, 27),
- die Analyse einfacher ohmscher Netzwerke (Aufgaben 23-25),
- die Behandlung einfacher Transistor-Verstärkernetzwerke (Aufgaben 21, 26).

Aufgabe 1.1

Im materiefreien Raum befindet sich eine sehr dünne, metallische Kugelfläche mit dem Radius r_0, auf der die elektrische Ladung Q gleichmäßig verteilt ist (Bild 1.1a). Die vorhandene Ladung erzeugt im gesamten Raum ein elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$. Wegen der Symmetrie der Anordnung kann $\boldsymbol{E}$ in irgendeinem Punkt P mit dem Abstand r vom Kugelmittelpunkt O nur eine bezüglich O radiale Komponente haben, die bei fest vorgegebener Ladung ausschließlich von r abhängt.

a) Unter Verwendung der Grundgleichung (1.3) aus EN soll die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ in P berechnet werden. Der Punkt P wird durch den von O nach P reichenden Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ gekennzeichnet. Bei der Anwendung der genannten Grundgleichung empfiehlt es sich, als Hüllfläche A eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r zu wählen. Man unterscheide die Fälle $r > r_0$ und $r < r_0$. Im zweiten Fall ist zu beachten, daß die Hüllfläche A keine Ladungen einschließt.

b) Man gebe den Feldlinienverlauf an und skizziere ihn in einer Ebene, die durch den Punkt O verläuft.

c) Man stelle die Potentialdifferenz zweier Punkte P_1 und P_2 als Linienintegral dar und zeige, daß diese Potentialdifferenz gleich Null ist, wenn P_1 und P_2 von O gleich weit entfernt sind.

d) Man berechne das Potential $\varphi(P)$ durch Integration der in Teilaufgabe *a* ermittelten Feldstärke. Dabei empfiehlt es sich, den Integrationsweg auf der durch O und P festgelegten Geraden zu wählen. Der von O unendlich weit entfernte Punkt auf dieser Geraden sei der Bezugspunkt P_0 für das Potential.
Man beschreibe die Flächen konstanten Potentials, die sogenannten Äquipotentialflächen für $r > r_0$.

e) Man berechne die Spannung zwischen zwei Punkten P_1 und P_2, von denen P_1 auf der Metall-Kugelfläche liegt und P_2 vom Mittelpunkt O den Abstand $2r_0$ hat.

f) Unter der Kapazität C der betrachteten Kugel um O mit dem Radius r_0 versteht man den Quotienten von Q dividiert durch die Spannung zwischen der Kugeloberfläche und der unendlich weit entfernten Äquipotentialfläche.
Man berechne C. Welchen Wert hat C für $r_0 = 6370\,\text{km}$, d.h. für den Fall einer Kugel vom Erdradius?

g) Läßt man bei festem Wert Q den Radius r_0 gegen Null streben, so erhält man eine Punktladung. Man beschreibe ihr elektrisches Feld.

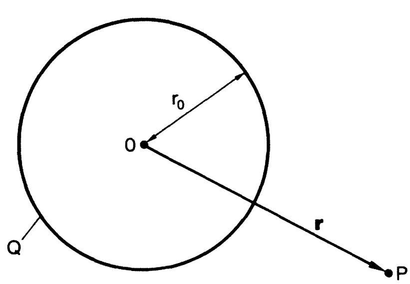

Bild 1.1a. Dünne metallische Kugelfläche mit der Ladung Q.

h) Zwei Punktladungen q bzw. $-q$ befinden sich im festen Abstand voneinander im Vakuum. Das elektrische Feld kann man sich durch Überlagerung der von den beiden Ladungen erzeugten Teilfelder entstanden denken. Für jeden Raumpunkt erhält man also durch vektorielle Addition der beiden dort herrschenden Teilfeldstärken die Gesamtfeldstärke, deren Richtung bekanntlich mit der Richtung der Feldlinientangente in diesem Punkt übereinstimmt.
Man veranschauliche sich den Verlauf des elektrischen Feldes, indem man für einige Punkte einer Ebene, in der die beiden Ladungen q und $-q$ liegen, die Feldlinientangente konstruiert.

i) Welche Kräfte üben zwei ruhende Punktladungen q_1 und q_2 im Abstand r_{12} aufeinander aus?

Lösung zu Aufgabe 1.1

a) Für eine beliebige Hüllfläche A, die vollständig außerhalb der Metallkugel verläuft, gilt

$$Q = \epsilon_0 \oiint_A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \; .$$

Wählt man für A zur Auswertung des Integrals eine Kugelfäche um O mit dem Radius $r > r_0$, so ist in jedem Punkt dieser Fläche

$$\boldsymbol{E} = E(r)\boldsymbol{e}_r \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mathrm{d}A\, \boldsymbol{e}_r \; ,$$

wobei $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$ den Einheitsvektor in Richtung von $\boldsymbol{r}$ bezeichnet. Damit wird

$$Q = \epsilon_0 \oiint_A E(r)\,\mathrm{d}A = \epsilon_0 E(r) \oiint_A \mathrm{d}A = \epsilon_0 E(r) 4\pi r^2 \; ,$$

und man erhält für den Raum außerhalb der Metallkugelfläche

$$\boldsymbol{E} = E(r)\boldsymbol{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2} \qquad (r > r_0) \; .$$

Für eine beliebige Hüllfläche A, die ganz im Innern der Metallkugelfläche verläuft, muß

$$\epsilon_0 \oiint_A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$$

gelten, da A keine Ladungen einschließt. Wählt man für A zur Auswertung des Integrals eine Kugelfläche um O mit dem Radius $r < r_0$ und beachtet die Beziehungen

$\boldsymbol{E} = E(r)\boldsymbol{e}_r$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mathrm{d}A\,\boldsymbol{e}_r$, so ergibt sich für die elektrische Feldstärke im Innern der Metallkugelfläche in analoger Weise

$$E(r) \equiv 0 \qquad (r < r_0)\,.$$

Im Bild 1.1b ist der berechnete Verlauf der Radialkomponente $E(r)$ für $Q > 0$ in Abhängigkeit von r aufgetragen.

b) In jedem Punkt des Außenraums $(r > r_0)$ müssen die elektrischen Feldstärke und die jeweilige Feldlinie tangential zueinander sein. Wegen der radialen Richtung der Feldstärke bezüglich O stellt für $r > r_0$ die Geradenschar durch O die Feldlinien dar; für $r < r_0$ gibt es keine Feldlinien, da $\boldsymbol{E} \equiv 0$ ist. Das Bild 1.1c veranschaulicht diesen Sachverhalt.

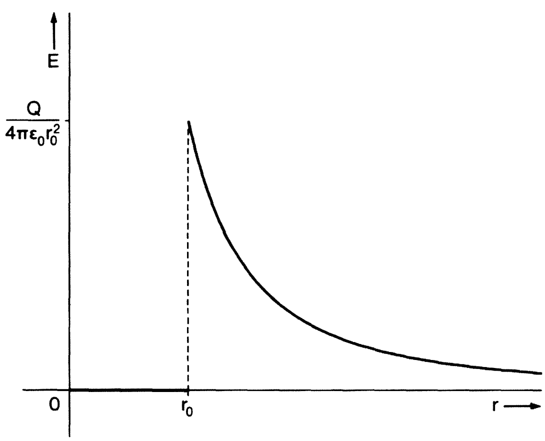

Bild 1.1b. Graphische Darstellung der elektrischen Feldstärke in Abhängigkeit vom Abstand r für den Fall $Q > 0$.

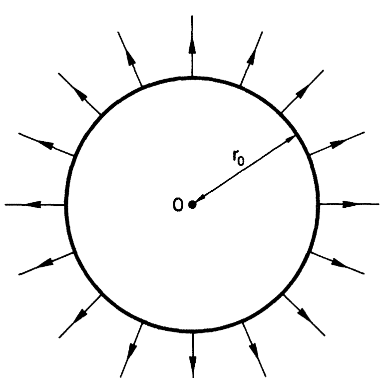

Bild 1.1c. Verlauf der elektrischen Feldlinien für die homogen geladene Kugel von Bild 1.1a.

c) Mit P_0 als dem Bezugspunkt des Potentials $\varphi(P)$ gilt für die Potentialdifferenz zwischen den Punkten P_1 und P_2

$$\varphi(P_1) - \varphi(P_2) = -\int_{P_0}^{P_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{P_0}^{P_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} .$$

Zur Auswertung des Integrals

$$\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

für zwei von O gleich weit entfernte Punkte P_1 und P_2 wählt man zweckmäßigerweise einen Integrationsweg auf derjenigen Kugelfläche mit O als Mittelpunkt, die durch P_1 und P_2 hindurchgeht. Bezeichnet man mit $\boldsymbol{e}_t$ den jeweiligen Tangenteneinheitsvektor in einem beliebigen Punkt dieses Weges, so gilt $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}s\,\boldsymbol{e}_t$ und damit

$$\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{P_1}^{P_2} E(r)\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_t \mathrm{d}s = 0 ,$$

da in jedem Punkt des Integrationsweges $\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_t = 0$ ist.
Zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 mit gleichem Abstand von O besteht demnach keine Potentialdifferenz, d.h. sie haben gleiches Potential.

d) Da nach Teilaufgabe *c* alle Punkte, die von O gleich weit entfernt sind, gleiches Potential besitzen müssen, darf zur Bestimmung von

$$\varphi(P) = -\int_{P_0}^{P} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß der Bezugspunkt P_0 auf der durch O und P festgelegten Geraden liegt. Wählt man als Integrationsweg diese Gerade, so ist für einen beliebigen Punkt dieses Weges mit dem Abstand s von O

$$\boldsymbol{E} = E(s)\,\boldsymbol{e}_r \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}s\,\boldsymbol{e}_r$$

Damit erhält man für das gesuchte Potential in einem Punkt P außerhalb der Metallkugelfläche

$$\varphi(P) = -\int_{\infty}^{r} E(s)\,\mathrm{d}s = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{\mathrm{d}s}{s^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \qquad (r > r_0) .$$

Liegt P auf der Metallkugelfläche, so ist

$$\varphi(P) = \varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0} .$$

Dasselbe Potential ergibt sich, wenn P innerhalb der Metallkugelfläche liegt, da wegen $E \equiv 0$ für $r < r_0$

$$\varphi(P) = -\int_{\infty}^{r_0} E(s)\,\mathrm{d}s - \int_{r_0}^{r} E(s)\,\mathrm{d}s = \varphi_0 + 0 = \varphi_0$$

gilt.

Alle Punkte gleichen Potentials müssen für $r > r_0$ nach Teilaufgabe *c* gleichen Abstand von O haben. Die Äquipotentialflächen sind demnach Kugelflächen.

e) Nach Teilaufgabe *c* erhält man

$$\varphi(P_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0} = \varphi_0 \qquad \text{und} \qquad \varphi(P_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r_0} .$$

Die Spannung zwischen P_1 und P_2 ergibt sich als Potentialdifferenz

$$u_{12} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r_0} .$$

f) Da die Spannung zwischen der Metallkugelfläche und dem Punkt Unendlich gleich dem Potential φ_0 ist, folgt für die Kapazität

$$C = \frac{Q}{\varphi_0} = 4\pi\epsilon_0 r_0 .$$

Mit den Zahlenwerten $\epsilon_0 = 8{,}85419 \cdot 10^{-12}$ As/Vm und $r_0 = 6370$ km erhält man den Kapazitätswert

$$C = 7{,}09 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{F} .$$

g) Am Feldverlauf ändert sich gegenüber den bisherigen Verhältnissen nichts. Die abgeleiteten Formeln für E und φ gelten jetzt für beliebiges $r > 0$.

h) Im Bild 1.1d ist das elektrische Feld zweier Punktladungen q und $-q$ in einer Schnittebene durch die Symmetrieachse der Anordnung veranschaulicht. Die Konstruktion der Gesamtfeldstärke aus den beiden Teilfeldstärken wird in drei willkürlich herausgegriffenen Punkten gezeigt. In den übrigen Punkten sind lediglich die Feldlinientangenten dargestellt.

i) Die Kraft, die das elektrische Feld $\boldsymbol{E}_1$ der Ladung q_1 auf die Ladung q_2 ausübt, ist

$$\boldsymbol{F}_2 = q_2 \boldsymbol{E}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^2} \boldsymbol{e}_{12} \, .$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{e}_{12}$ den Einheitsvektor in Richtung von q_1 nach q_2. Entsprechend erhält man $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$ als die auf q_1 wirkende Kraft des von q_2 herrührenden elektrischen Feldes $\boldsymbol{E}_2$. Das Ergebnis ist unter dem Namen Coulombsches Gesetz bekannt.

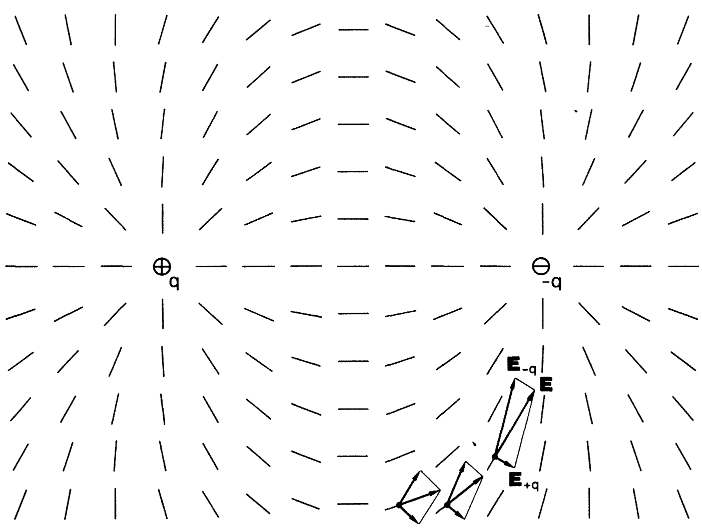

Bild 1.1d. Elektrisches Feld zweier entgegengesetzt gleicher Punktladungen. Die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ ergibt sich in jedem Punkt durch vektorielle Addition der von q herrührenden Feldstärke $\boldsymbol{E}_{+q}$ und der von $-q$ herrührenden Feldstärke $\boldsymbol{E}_{-q}$. Bei der gezeigten Konstruktion wurde $q > 0$ angenommen.

Aufgabe 1.2

Zwischen den unendlich ausgedehnten Ebenen $x = -x_0$ und $x = x_0$ (Bild 1.2a) befinden sich ortsfeste, gleichmäßig verteilte Punktladungen q mit der Konzentration n ($|q|$ sehr klein, n sehr groß). Diese Ladungen haben im gesamten Raum ein elektrisches Feld zur Folge, das aus Symmetriegründen nur eine von y und z unabhängige Komponente in x-Richtung haben kann[1]). Die elektrische Feldstärke läßt sich also in der Form $\boldsymbol{E} = E_x(x)\boldsymbol{e}_x$ schreiben, wobei $\boldsymbol{e}_x$ den Einheitsvektor in x-Richtung bezeichnet. Dabei besteht offensichtlich die Beziehung $E_x(x) = -E_x(-x)$ für beliebige Werte x.

a) Unter Verwendung der Grundgleichung (1.3) aus EN soll die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ im gesamten Raum ermittelt werden. Dabei ist es empfehlenswert, die für die Auswertung dieser Grundgleichung erforderliche Hüllfläche A so zu wählen, daß die Symmetriebeziehung $E_x(x) = -E_x(-x)$ ausgenützt werden kann.

b) Führt man den Grenzübergang $x_0 \to 0$ durch, ohne dabei die zwischen den Ebenen $x = -x_0$ und $x = x_0$ eingeschlossene Gesamtladung zu verändern, dann tritt an die Stelle der ursprünglichen Raumladung mit der Raumladungsdichte $\rho = nq$ eine Flächenladung mit der Flächenladungsdichte $\sigma = 2x_0nq$. Welchen Verlauf hat für diesen Grenzfall die Funktion $E_x(x)$? Wie verlaufen die elektrischen Feldlinien?

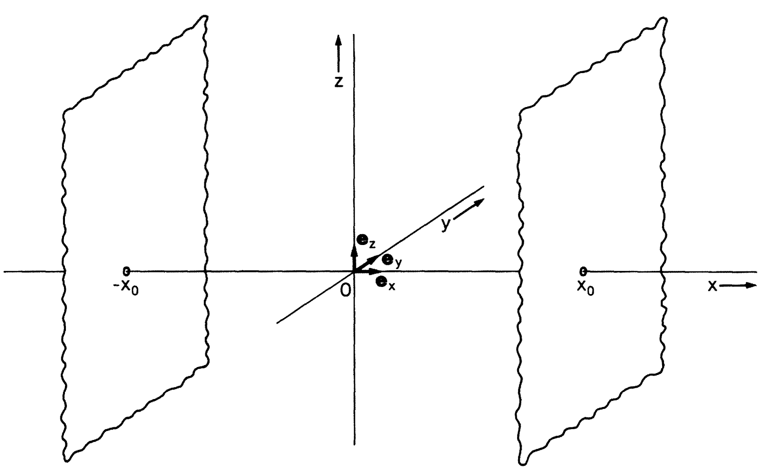

Bild 1.2a. Kartesisches Koordinatensystem mit den Ebenen $x = -x_0$ und $x = x_0$.

---

[1]) Zum Nachweis der obengenannten Symmetrieeigenschaften des elektrischen Feldes wird ein beliebiger Punkt P mit den Koordinaten x, y, z betrachtet. Dreht man die gesamte Anordnung um eine durch den Punkt P verlaufende Parallele zur x-Achse, dann darf sich der Feldstärkevektor $\boldsymbol{E}$ in diesem Punkt nicht ändern, da die Ladungsverteilung unabhängig vom Drehwinkel ist. Dies ist nur möglich, wenn $\boldsymbol{E}$ die Richtung der Drehachse hat, d.h. weder eine y- noch eine z-Komponente besitzt.
Nun wird in der yz-Ebene eine Gerade derart gewählt, daß durch eine Drehung der Anordnung um diese Gerade der Punkt P in seinen bezüglich der yz-Ebene symmetrischen Punkt übergeführt werden kann. Da diese Drehung keine Änderung der Ladungsverteilung zur Folge hat, tritt auch keine Feldänderung ein. Der Feldstärkevektor muß also in den beiden Spiegelpunkten den gleichen Betrag, jedoch die entgegengesetzte Richtung haben. Daher gilt $E_x(x) = -E_x(-x)$.

Lösung zu Aufgabe 1.2

a) Für die Auswertung der Grundgleichung

$$Q = \epsilon_0 \oiint_A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{1}$$

betrachtet man zweckmäßigerweise eine zur yz-Ebene symmetrische Hüllfläche A von quaderförmiger Gestalt mit der Kantenlänge $2a$ in x-Richtung und den Kantenlängen b bzw. c in den beiden übrigen Koordinatenrichtungen (Bild 1.2b). Die gesamte Hüllfläche A setzt sich also aus sechs ebenen rechteckigen Teilflächen zusammen, deren Normalenvektoren in Richtung der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$, $-\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $-\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ bzw. $-\boldsymbol{e}_z$ zeigen.

Da die elektrische Feldstärke lediglich eine Komponente in x-Richtung besitzt, erhält man nur für die beiden zur yz-Ebene parallelen Teilflächen A_1 und A_2 des Quaders einen Beitrag zum Oberflächenintegral. Bei den restlichen vier Teilflächen bilden die Normalenvektoren mit der Richtung der elektrischen Feldstärke einen rechten Winkel, so daß in allen Punkten dieser Teilflächen das Skalarprodukt $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ verschwindet. Man erhält somit

$$\oiint_A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \iint_{A_1} E_x(a)\boldsymbol{e}_x \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} + \iint_{A_2} E_x(-a)\boldsymbol{e}_x \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

$$= E_x(a)\iint_{A_1} \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x \mathrm{d}A + E_x(-a)\iint_{A_2} \boldsymbol{e}_x \cdot (-\boldsymbol{e}_x \mathrm{d}A)\,.$$

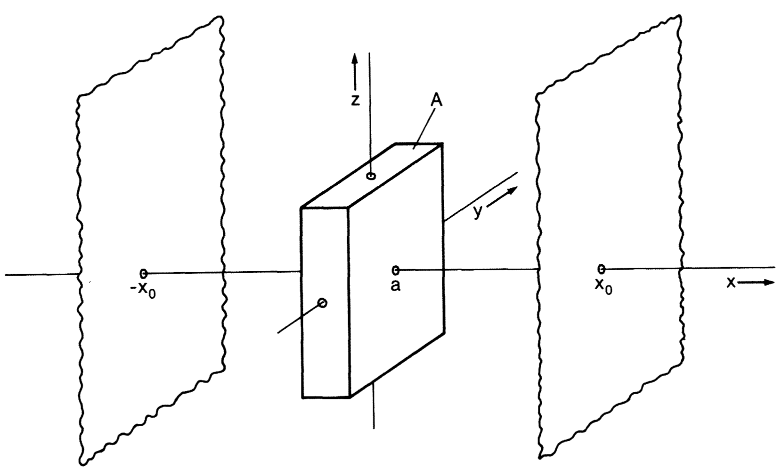

Bild 1.2b. Wahl der Hüllfläche A in Form eines zur yz-Ebene symmetrischen Quaders mit der Kantenlänge $2a$ in x-Richtung.

Beachtet man, daß $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = 1$ und $\boldsymbol{e}_x \cdot (-\boldsymbol{e}_x) = -1$ ist und daß $E_x(a) = -E_x(-a)$ gilt, dann folgt hieraus schließlich

$$\oiint_A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 2bcE_x(a) \,. \tag{2}$$

Die von der Quaderfläche A eingeschlossene Ladung ist

$$Q = \begin{cases} 2abcnq & \text{für} \quad a \leqslant x_0 \,, \\ \\ 2x_0bcnq & \text{für} \quad a > x_0 \,. \end{cases}$$

Hieraus läßt sich mit Hilfe der Gln.(1) und (2) eine Beziehung zur Berechnung von $E_x(a)$ gewinnen. Sie lautet

$$2abcnq = 2bc\epsilon_0 E_x(a) \qquad \text{für} \qquad a \leqslant x_0 \tag{3a}$$

und

$$2x_0bcnq = 2bc\epsilon_0 E_x(a) \qquad \text{für} \qquad a > x_0 \,. \tag{3b}$$

Da die hier durchgeführten Überlegungen für beliebige nicht-negative Werte a gültig sind, darf a durch die Variable x ersetzt werden, sofern x keine negativen Werte annimmt. Berücksichtigt man außerdem noch die Symmetriebeziehung $E_x(x) = -E_x(-x)$, dann erhält man aus den Gln.(3a,b) für beliebige Werte x die Feldstärkenkomponente

$$E_x(x) = \begin{cases} -\dfrac{nqx_0}{\epsilon_0} & \text{für} \quad x < -x_0 \,, \\ \dfrac{nqx}{\epsilon_0} & \text{für} \quad -x_0 \leqslant x \leqslant x_0 \,, \\ \dfrac{nqx_0}{\epsilon_0} & \text{für} \quad x > x_0 \,. \end{cases}$$

Der Verlauf der Funktion $E_x(x)$ ist im Bild 1.2c für den Fall $q > 0$ in einem Diagramm über x aufgetragen.

b) Läßt man $x_0 \to 0$ gehen, ohne dabei die zwischen den Ebenen $x = -x_0$ und $x = x_0$ eingeschlossene Gesamtladung zu verändern, dann folgt aus den Ergebnissen von Teilaufgabe *a* mit $2x_0 nq = \sigma$ unmittelbar

$$E_x(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{für} \quad x < 0\,, \\ \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{für} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

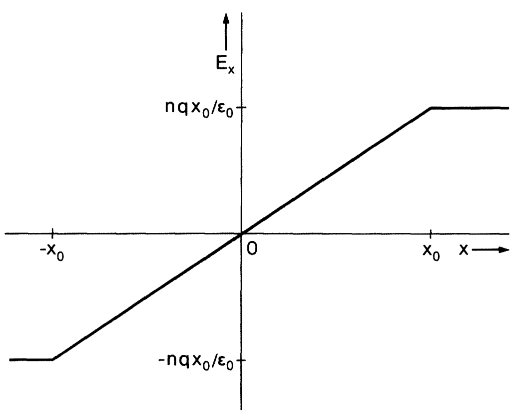

Bild 1.2c. Verlauf der elektrischen Feldstärke in Abhängigkeit von x für den Fall $q > 0$.

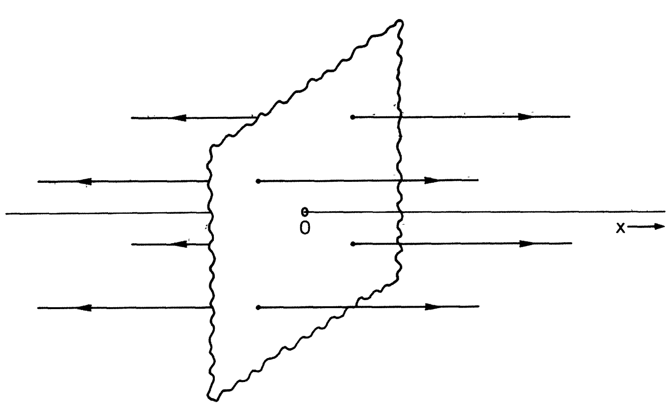

Bild 1.2d. Verlauf der elektrischen Feldlinien in Abhängigkeit von x für den Fall der homogen geladenen yz-Ebene.

Die Funktion $E_x(x)$ ist also an der Stelle $x = 0$ unstetig. Die Sprunghöhe hat den Wert σ/ϵ_0. Die von der geladenen Fläche hervorgerufenen Feldlinien, die parallel zur x-Achse verlaufen, sind im Bild 1.2d dargestellt.

Aufgabe 1.3

In einem unendlich ausgedehnten Raumgebiet, das gemäß Bild 1.3a von den Ebenen $x = -x_2$ und $x = x_1$ begrenzt ist, befinden sich ortsfeste Punktladungen, und zwar rechts von der yz-Ebene Ladungen q mit der ortsunabhängigen Konzentration n ($|q|$ sehr klein, n sehr groß), links von der yz-Ebene Ladungen $-q$ mit der ortsunabhängigen Konzentration $(x_1/x_2)n$. Damit auch diese Konzentration sehr groß ist, sollen x_1 und x_2 etwa von gleicher Größenordnung sein. Die vorliegende Ladungsanordnung setzt sich aus zwei Teilanordnungen zusammen, wie sie in der Aufgabe 1.2 untersucht wurden. Demzufolge kann man sich das elektrische Feld der Gesamtanordnung durch additive Überlagerung der Felder der Teilanordnungen erzeugt denken. Für die Feldstärke gilt daher $\boldsymbol{E} = E_x(x)\boldsymbol{e}_x$. Dabei bedeutet $\boldsymbol{e}_x$ den Einheitsvektor in x-Richtung.

a) Aufgrund der Ergebnisse von Aufgabe 1.2 gebe man die Funktion $E_x(x)$ an und zeige insbesondere, daß $E_x(x)$ für $x \leqslant -x_2$ und $x \geqslant x_1$ verschwindet.

b) Welche Spannung tritt zwischen den Ebenen $x = -x_2$ und $x = x_1$ auf?

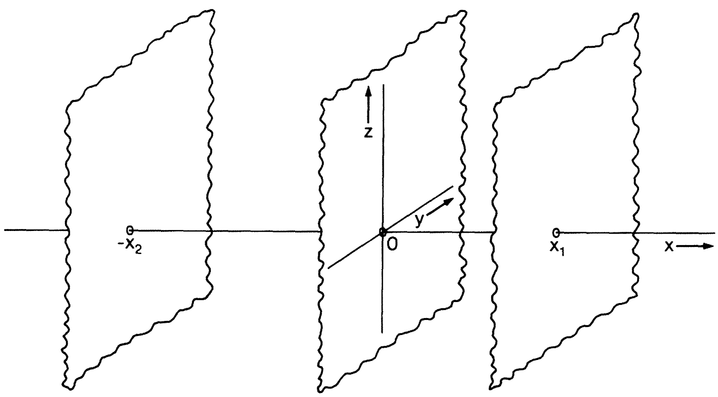

Bild 1.3a. Kartesisches Koordinatensystem mit den Ebenen $x = -x_2$ und $x = x_1$.

Lösung zu Aufgabe 1.3

a) Die von den Ebenen $x = 0$ und $x = x_1$ eingeschlossenen Punktladungen haben ein elektrisches Feld $\boldsymbol{E}_1$ zur Folge, das aus Symmetriegründen nur eine von x abhängige Komponente $E_{1x}(x)$ in Richtung von $\boldsymbol{e}_x$ besitzt. Aufgrund der Ergebnisse von Aufgabe 1.2 erhält man

$$E_{1x}(x) = \begin{cases} -\dfrac{nq}{\epsilon_0}\dfrac{x_1}{2} & \text{für} \quad x < 0\,, \\[2ex] \dfrac{nq}{\epsilon_0}\left(x - \dfrac{x_1}{2}\right) & \text{für} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_1\,, \\[2ex] \dfrac{nq}{\epsilon_0}\dfrac{x_1}{2} & \text{für} \quad x > x_1\,. \end{cases}$$

In entsprechender Weise rufen die zwischen $x = -x_2$ und $x = 0$ eingeschlossenen Punktladungen ein elektrisches Feld $\boldsymbol{E}_2 = E_{2x}(x)\boldsymbol{e}_x$ mit

$$E_{2x}(x) = \begin{cases} \dfrac{nq}{\epsilon_0}\dfrac{x_1}{2} & \text{für} \quad x < -x_2\,, \\ -\dfrac{nq}{\epsilon_0}\dfrac{x_1}{x_2}\left(x + \dfrac{x_2}{2}\right) & \text{für} \quad -x_2 \leqslant x \leqslant 0\,, \\ -\dfrac{nq}{\epsilon_0}\dfrac{x_1}{2} & \text{für} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

hervor. Als Gesamtfeld ergibt sich durch additive Überlagerung der beiden Teilfelder

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = [E_{1x}(x) + E_{2x}(x)]\boldsymbol{e}_x = E_x(x)\boldsymbol{e}_x\,.$$

Die Funktion $E_x(x)$ kann in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$E_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -x_2\,, \\ -\dfrac{nq}{\epsilon_0}\dfrac{x_1}{x_2}(x + x_2) & \text{für} \quad -x_2 \leqslant x \leqslant 0\,, \\ \dfrac{nq}{\epsilon_0}(x - x_1) & \text{für} \quad 0 < x \leqslant x_1\,, \\ 0 & \text{für} \quad x > x_1\,. \end{cases}$$

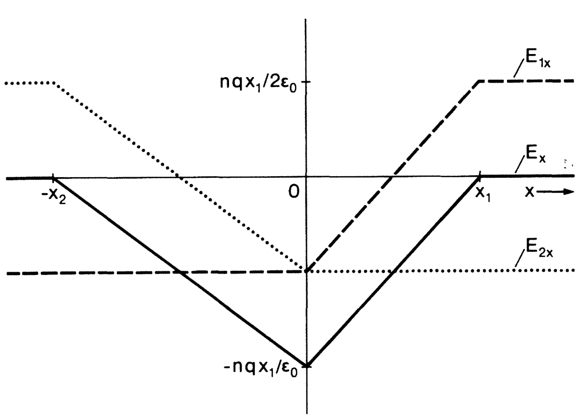

Bild 1.3b. Verlauf der elektrischen Feldstärken in Abhängigkeit von x.