Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1234

Combinatoire énumérative

Proceedings of the "Colloque de combinatoire énumérative", held at Université du Québec à Montréal, May 28 – June 1, 1985

Edité par G. Labelle et P. Leroux

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Editors

Gilbert Labelle
Pierre Leroux
Département de mathématiques et d'informatique
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. A
Montréal, Québec, Canada H3C 3P8

Mathematics Subject Classification (1980): Primary: 05XX
Secondary: 15AXX, 18AXX, 33AXX, 34AXX

ISBN 3-540-17207-6 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-17207-6 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

INTRODUCTION

This is the Proceedings volume of the "Colloque de combinatoire énumérative, UQAM 1985", which was held at "Université du Québec à Montréal" (UQAM) from May 28 to June 1, 1985, and complemented by a Special Session on Combinatorics at the annual meeting of the Canadian Mathematical Society at "Université Laval", June 6-8, 1985.

The subjects covered in this volume include: enumeration and analysis of specific combinatorial structures like planar maps, Young tableaux, bridges or Dyck paths, and latin rectangles; combinatorics on words; applications of enumerative combinatorics to q-series, to orthogonal polynomials, to differential equations, to linear representations of the symmetric group, to the celebrated Macdonald and Jacobian conjectures, to Lie algebras, etc; recent developments in the combinatorial theory of species of structures; survey papers on Young's work, on Pólya theory, and on a new theory of "heaps of pieces"; a problem session.

The rest of this introduction gives a more detailed description of the scientific activities of the colloquium and of the content of the Proceedings. It is written in french to reflect the bilingual nature of the meeting. Note that while many talks were given in french, a majority (80%) of papers in this volume are written in Shakespeare's language.

Depuis quelques années, la recherche en combinatoire a connu un développement considérable. Il s'agit maintenant d'un véritable domaine des mathématiques qui possède ses objectifs propres (le dénombrement, l'analyse, la construction et la classification des structures finies), des méthodes et des outils de plus en plus efficaces (bijections et involutions, séries génératrices et indicatrices diverses, formules d'inversion, théorie de Pólya, théorie des espèces de structures, développements asymptotiques, etc.) et des champs d'applications très vastes, notamment en analyse classique (polynômes orthogonaux, q-séries, équations différentielles, etc.), en algèbre (algèbre linéaire, fonctions symétriques, représentations des groupes symétriques, algèbre commutative, ...), en informatique (structures de données, conception et analyse d'algorithmes, combinatoire des mots, etc.), en théorie des probabilités, groupes et algèbres de Lie, analyse numérique, topologie algébrique, physique statistique, biologie moléculaire, etc.

Dans le but de faire le point sur ces développements récents, le groupe de recherche en combinatoire de l'Université du Québec à Montréal a organisé un colloque international qui a réuni pendant cinq jours (du 28 mai au I^{er} juin 1985) plus de cent participants et donné lieu à 35 conférences et communications. De plus, deux membres de l'équipe ont organisé une Session spéciale de combinatoire dans le cadre de la réunion annuelle d'été de la Société mathématique du Canada, tenue quelques jours plus tard, soit du 6 au 8 juin 1985, à l'Université Laval, à Québec. On trouvera ci-après une liste de participants au colloque de l'UQAM (une photo de groupe est disponible sur demande) ainsi que le programme scientifique du colloque et de la session spéciale à Québec.

Ce volume constitue donc les comptes-rendus du colloque de combinatoire énumérative, UQAM 1985, et de sa continuation à Québec. Les articles qu'il contient recouvrent une grande partie des thèmes abordés à ces occasions. Ils portent plus particulièrement sur les sujets suivants:

1. Articles de synthèse, en particulier sur les travaux de Young, sur la théorie de Pólya, ainsi que sur les empilements de pièces, théorie qui jette un regard géométrique nouveau sur les monoïdes de commutation de Cartier-Foata et qui est susceptible de multiples applications.

2. La théorie des espèces de structures: plusieurs articles font le point sur certains aspects de cette théorie combinatoire globale, à la fois élégante et efficace: règles et méthodes de calcul, décompositions et classifications, généralisations, etc.

3. Applications de la combinatoire énumérative, par exemple à l'étude des représentations linéaires du groupe symétrique, des fonctions hypergéométriques basiques, des polynômes orthogonaux, des équations différentielles, d'algèbre de Lie d'opérateurs différentiels, ou des célèbres conjectures de Macdonald et jacobienne, à la généralisation des fonctions tangente et sécante, etc.

4. Problèmes de dénombrements de structures particulières selon certains paramètres, par exemple, les "cartes et hypercartes", les "rectangles latins", "les tableaux de Young", les "ponts" également nommés "chemins de Dyck", les "partitions" ou "partages d'entiers" et les "partitions planes", les "tournois", etc.

5. Problèmes de la combinatoire des mots: palindromes, algèbres de mélange et algèbres de Lie, etc.

6. Rapport de la séance de problèmes tenue pendant le colloque.

Signalons que quelques auteurs ont initié dans ces comptes-rendus des séries importantes d'articles portant plus particulièrement sur la résolution combinatoire des équations différentielles, sur la combinatoire des polynômes de Jacobi, et sur la théorie des empilements de pièces.

Remerciements

Au nom des organisateurs du Colloque de combinatoire énumérative UQAM 1985, André Joyal, Gilbert Labelle, Jacques Labelle, Pierre Leroux et Volker Strehl et au nom de tous les participants, nous remercions chaleureusement les personnes et organismes suivants:

La Fondation UQAM, le Conseil de recherche en science naturelle et en génie du Canada, le Fonds FCAR du Québec, l'Université du Québec à Montréal, pour leur aide financière généreuse.

La société mathématique du Canada, qui a parrainé le Colloque de Montréal et suscité la tenue de la session spéciale de combinatoire à Québec, ainsi que l'Université Laval pour son hospitalité.

Les conférenciers invités qui ont agi comme éditeurs associés ainsi que les nombreux arbitres qui ont effectué un excellent travail d'examen critique de tous les articles soumis à ces comptes-rendus.

Hélène Décoste, étudiante au doctorat, pour son expertise et son aide constante dans l'organisation du colloque et la préparation des comptes-rendus, notamment au niveau du traitement de texte et d'images sur micro-ordinateur Macintosh.

Dominique Chabot, France Gauthier, Hélène Meunier, secrétaires du Département de mathématiques et d'informatique de l'UQAM qui ont assuré la mise en forme d'un grand nombre d'articles de ces comptes-rendus.

Les différents services de l'UQAM, en particulier le service des relations publiques ainsi que Manon Gauthier et Madeleine Loubert, et les nombreux étudiants qui ont contribué à rendre ce colloque des plus accueillants et à en faire ainsi un franc succès.

Gilbert Labelle, Pierre Leroux

PARTICIPANTS

Jaromir ABRHAM
Dept. Industrial Engineering
University of Toronto
Toronto, Ontario
Canada, M5S 1A4

Ashok K. AGARWAL
Dept. of Mathematics
Pennsylvania State University
University Park, PA 16802
U.S.A.

Georges E. ANDREWS
Dept. of Mathematics
Pennsylvania State University
University Park, PA 16802
U.S.A.

Pierre ANTAYA
91, rue Dollard
Chateauguay (Québec)
Canada
J6K 1W5

Didier ARQUÈS
Institut des Sciences ex. et appl.
4, rue des frères Lumières
F-68093 Mulhouse
France

Richard ASKEY
Dept. of Mathematics
University of Wisconsin
Madison, WI 53706
U.S.A.

Joffroy BEAUQUIER
Labor. Rech. Informatique
Université Paris Sud
F-91405 Orsay
France

François BÉDARD
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Marie-France BÉLANGER
Dép. mathématiques et informatique
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, (Québec)
Canada, J1K 1N7

François BERGERON
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Nantel BERGERON
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Terry BISSON
Department of Mathematics
Canisius College
Buffalo, N. Y. 14208
U.S.A.

Anders BJÖRNER
Dept. of Mathematics
Mass. Institute of Technology
Cambridge, MA 02139
U.S.A.

Marie BLAIN
785, Rue Franchère
Laval, (Québec)
Canada
H7E 3R1

Sylvain BOUCHER
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Pierre BOUCHARD
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Jacques BOURRET
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

David BRESSOUD
Dept. of Mathematics
Pennsylvania State University
University Park, PA 16802
U.S.A.

Srecko BRLEK
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Jim BYRNES
Dept. of Math., Harbor Campus
Univ. of Massachussets at Boston
Boston, MA 02125
U.S.A.

N. J. CALKIN
Dept. of Combin. & Optim.
University of Waterloo
Waterloo, Ontario
Canada, N2L 3G1

Luigi CERLIENCO
Instituto Matematico Dell'Univ.
Via Ospedale 72
I-09100 Cagliari
Italie

Phillip J. CHASE
8716, Oxwell Lane
Laurel
Maryland, 20708
U.S.A.

Young-Ming CHEN
Dept. of Math. & Comp. Sci.
S.U.N.Y. College at Brockport
Brockport, New York 14420
U.S.A.

Julien CONSTANTIN
Dép. mathématiques et informatique
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, (Québec)
Canada, J1K 1N7

Ivan CONSTANTINEAU
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Henry CRAPO
Bat. 24, INRIA
B. P. 105
F-78153 Le Chesnay Cedex
France

Pierre DAMPHOUSSE
Dép. de Mathématiques
Univ. de Tours
F-37200 Tours
France

Hélène DÉCOSTE
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Maylis DELEST
UER Math & Info., Univ. Bordeaux I
351, Cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex
France

Myriam DESAINTE-CATHERINE
Math & Info., Univ. Bordeaux I
351, Cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex
France

Serge DULUCQ
Math. & Info., Un. Bordeaux I
351, Cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex
France

Omer EGECIOGLU
Dept. of Computer Science
Univ. of California, Santa Barbara
Santa Barbara, CA 93106
U.S.A.

Mohsine ELEUDJ
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Luc FAVREAU
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Dominique FOATA
Dept. de Math. Univ. Strasbourg
7, rue René Descartes
F-67084 Strasbourg
France

John M. FREEMAN
Dept. of Mathematics
Florida Atlantic University
Boca Raton, FL 33431
U.S.A.

Jean-François GAGNÉ
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Adriano GARSIA
Dept. of Mathematics
Un. California, San Diego
La Jolla, CA 92093
U.S.A.

Daniel GATIEN
Dept. of Mathematics
Mass. Institute of of Technology
Cambridge, MA 02139
U.S.A.

Gilles GAUTHIER
Dep. Sciences fondamentales
Université du Québec à Chicoutimi
Chicoutimi, Qué.
Canada, G7H 2B1

Ira M. GESSEL
Dept of Mathematics
Brandeis University
Waltham, MA 02254
U.S.A.

Chris GODSIL
Department of Mathematics
Simon Fraser University
Brunaby, British Columbia
Canada, V5A 1S6

Ian GOULDEN
Dept of Comb. & Optim.
University of Waterloo
Waterloo, Ontario
Canada, N2L 3W4

Dominique GOUYOU-BEAUCHAMPS
UER Math & Info. Univ. Bordeaux
351, Cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex
France

Curtis GREENE
Dept. of Mathematics
Haverford College
Haverford, PA 19041
U.S.A.

Werner HÄSSELBARTH
Inst. Quantenchemie Tu Berlin
Holbeinstr. 48
D-1000 Berlin
R.F.A.

David J. JACKSON
Dept. Comb. & Optim.
University of Waterloo
Waterloo, Ontario
Canada, N2L 3G1

André JOYAL
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Gil KALAI
Dept. of Mathematics
Mass. Institute of Technology
Cambridge, MA 02139
U.S.A.

Adalbert KERBER
Math. Inst. Univ. Bayreuth
Postfach 3008
D-8580 Bayreuth
R.F.A.

Germain KREWERAS
Inst. de Stat. Univ. P. et M. Curie
4, Place Jussieu
F-75005, Paris
France

Nicholas KRIER
Dept. of Mathematics
Colorado State University
Fort Collins, CO 80523
U.S.A.

Gilbert LABELLE
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Jacques LABELLE
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Martine LABRÈCHE
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Clément LAM
Computer Sc., Concordia University
1455, Boul. de Maisonneuve Ouest
Montréal, Qué.
Canada, H3G 1M8

Denis LARIVIÈRE
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Pierre LEROUX
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Jean-Benoit LÉVESQUE
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

André LONGTIN
Dép. de Mathématiques
Univ. du Québec à Trois-Rivières
C. P. 500, Trois-Rivières, Qué.
Canada, G9A 5H7

Anne-Marie LORRAIN
9218, Ave. Millen
Montréal, (Québec)
Canada,
H2M 1W7

Diana MARCUS
Dept. of Math., Mesa College
Mesa College Drive
San Diego, CA 92111
U.S.A.

John McKAY
Computer Sc., Concordia University
1455, Boul. de Maisonneuve Ouest
Montréal, Qué.
Canada, H3G 1M8

Guy MELANCON
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Armel MERCIER
Dép. de Mathématiques, UQAC
555, Boul. Université
Chicoutimi, Qué
Canada, G7H 2B1

Robert MICHAUD
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Sri G. MOHANTY
Dept. Math. Sci., McMaster Univ.
1280 Main Street West
Hamilton, Ontario
Canada, L8S 4K1

Claire MORAZAIN
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Tadepalli NARAYANA
Dept. of Mathematics
University of Alberta
Edmonton, Alberta
Canada, T6G 2H1

Oscar NAVA
Dept of Mathematics
Mass. Institute of Technology
Cambridge, MA 02139
U.S.A.

Heinrich NIEDERHAUSEN
Dept. of Mathematics
Florida Atlantic University
Boca Raton, Florida 33431
U.S.A.

Kathy O'HARA
Dept. of Mathematics
Grinnell College
Grinnell, Iowa 50112-0806
U.S.A.

Joseph OLIVEIRA
Dept. of Mathematics
Mass. Institute of Technology
Cambridge, MA 02139
U.S.A.

Peter PAULE
Mathematik, Univ. Bayreuth
Postfach 3008
D 8580 Bayreuth
R.F.A.

Alain PAUTASSO
Computer Sc., Concordia University
1455, Boul. De Maisonneuve Ouest
Montréal, Québec
Canada, H3G 1M8

Francesco PIRAS
Dip. di Mathematica, Un. di Cagliari
Via Ospedale 72
I-09100 Cagliari
Italie

Simon PLOUFFE
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Robert W. QUACKENBUSH
Dept. of Mathematics and Astronomy
The University of Manitoba
Winnipeg, Manitoba
Canada, R3T 2N2

Don RAWLINGS
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Eric REGENER
Comp. Sci., Concordia Univ.
1455 De Maisonneuve Ouest
Montréal, Qué.
Canada, H3G 1M8

Jeff REMMEL
Dept. of Mathematics
Univ. Cal. San Diego
La Jolla, CA 92093
U.S.A.

Christophe REUTENAUER
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Bruce RICHMOND
Dept, of Combin. & Optim.
University of Waterloo
Waterloo, Ont.
Canada, N2L 3G1

Ivan RIVAL
Dept. of Mahematics and Statistics
University of Calgary
Calgary, Alberta
Canada, T2N 1N4

Jean-François ROCHON
Société de Téléinformatique RTC
2050 Mansfield
Montréal (Québec)
Canada, H3A 1Y9

Ivo ROSENBERG
Dép. de Mathématiques et Statistiques
Université de Montréal
C. P. 6128, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3J7

Gian-Carlo ROTA
Dept. of Mathematics
Mass. Institute of Technology
Cambridge, MA 02139
U.S.A.

Ernst RUCH
Inst. Quantenchemie Fu Berlin
Holbeinstrasse 48
D-1000, Berlin
R.F.A.

Bruce SAGAN
Department of Mathematics
Univ. of Pennsylvania
Philadelphia, PA 19104
U.S.A.

Richard STANLEY
Dept. of Mathematics
Mass. Institute of Technology
Cambridge, MA 02139
U.S.A.

Dennis STANTON
School of Mathematics
Univ. of Minnesota
Minneapolis, MR 55455
U.S.A.

Volker STREHL
Informatik 1 Univ. Erlangen
Martensstr. 3
D-8520 Erlangen
R.F.A.

Claudette TABIB
1045, rue Michel Moreau
Boucherville (Québec)
Canada
J4B 3Z9

Denis THÉRIEN
Comp. Sci., Mc Gill University
C. P. 6070, Succ. A
Montréal (Québec)
Canada, H3C 3G1

Gabriel THIERRIN
Dept. of Mathematics
University of Western Ontario
London, Ont.
Canada, N6A 5B7

Loys THIMONIER
U.E.R. de Mathematiques
Univ. Amiens
F-80039 Amiens Cedex
France

Pierre TREMBLAY
Dept. of Mathematics
Penn State University
University Park, PA 16802
U.S.A.

Edward VALENTINE
Comp. Sci., Concordia University
1455, Boul. de Maisonneuve Ouest
Montréal, Qué.
Canada, H3G 1M8

Antonietta VENEZIA
Dip. Math., U. di Roma
Piazzale A. Moro
I-00100 Roma
Italie

Gérard X. VIENNOT
UER Math. & Info., Univ. Bordeaux I
351, Cours de la Libération
F-33405 Talence
France

Terry VISENTIN
Dept. of Combinatorics and Optim
University of Waterloo
Waterloo, Ont.
Canada, N2L 3G1

Dennis WHITE
School of Mathematics
University of Minnesota
Minneapolis, MN 55455
U.S.A.

Yeong-Nan YEH
Dép. mathématiques et informatique
Université du Québec à Montréal
C. P. 8888, Succ. A, Montréal, Qué.
Canada, H3C 3P8

Doron ZEILBERGER
Dept. of Mathematical Science
Drexel University
Philadelphia, PA 19104
U.S.A.

Günther ZIEGLER
Dept. of Mathematics
Mass. Institute of Technology
Cambridge, MA 02139
U.S.A.

COLLOQUE DE COMBINATOIRE ÉNUMÉRATIVE, UQAM 1985
DU 28 MAI AU 1er JUIN 1985

CONFÉRENCES (50 min.)

George E. Andrews Pennsylvania State University, State College
1. *SCRATCHPAD and Combinatorics.*
2. *q-Series, Partitions and Physics.*

Richard Askey University of Wisconsin, Madison
Basic Hypergeometric Extensions of the Classical Orthogonal Polynomials.

Dominique Foata Université de Strasbourg
Fonctions symétriques et séries hypergéométriques multivariées.

Adriano M. Garsia University of California, San Diego
Alfred Young revisited.

Ira Gessel Brandeis University, Waltham Mass.
Derangements, Charlier Polynomials and Three-Line Latin Rectangles.

David M. Jackson University of Waterloo
Counting cycles in permutations by group characters .

André Joyal Université du Québec à Montréal
La théorie des espèces de structures.

Adalbert Kerber Universität Bayreuth
Enumeration under Finite Group Action: Symmetry Classes of Mappings.

Gilbert Labelle Université du Québec à Montréal
Méthodes de calcul en théorie des espèces.

Gian-Carlo Rota Massachusetts Institute of Technology, Cambridge
Le pléthysme.

Richard P. Stanley Massachusetts Institute of Technology, Cambridge
Two Poset Polytopes.

Volker Strehl Universität Erlangen-Nürnberg
La combinatoire des configurations de Jacobi.

Gérard X. Viennot Université de Bordeaux I
1. *Empilements I: Lemmes fondamentaux.*
2. *Empilements II: Applications.*

Doron Zeilberger Drexel University, Philadelphia
Towards a Combinatorial Proof of the Jacobian Conjecture?

COMMUNICATIONS (30 min.)

Didier Arquès Institut des Sciences exactes et appl., Mulhouse
Une relation fonctionnelle nouvelle et son application au dénombrement des cartes et hypercartes planaires pointées.

François Bergeron Université du Québec à Montréal
Représentations combinatoires de groupes et algèbres de Lie.

Anders Björner* Massachusetts Institute of Technology, Cambridge
Michelle Wachs University of Miami
Generalized Quotients of Finite Coxeter Groups.

David Bressoud Pensylvania State University, State College
Sur les identités pour les termes constants reliés aux systèmes de racines.

Pierre Damphousse Université de Tours
Classification des cartes cellulaires.

Marie-Pierre Delest Université de Bordeaux I
Enumération de polyominos verticalement convexes.

Serge Dulucq*, Robert Cori,
Gérard X. Viennot Université de Bordeaux I
Chemins dans le plan et permutations de Baxter alternantes.

Omer Egecioglu* University of California, Santa Barbara
Jeff Remmel University of California, San Diego
A Combinatorial Proof of the Giambelli Identity for Schur Functions.

Chris Godsil Simon Fraser University, Vancouver
Generating Latin Rectangles.

D. Gouyou-Beauchamps Université de Bordeaux I
Tableaux de Young et chemins sous-diagonaux.

Werner Hässelbarth Freie Universität Berlin
A Generalisation of the Pólya/de Bruijn Enumeration Theory and its Application to "Chemical Combinatorics".

Germain Kreweras Université Pierre et Marie Curie, Paris
Lois croisées de plusieurs paramètres descriptifs des ponts.

Pierre Leroux* Université du Québec à Montréal
Gérard X. Viennot Université de Bordeaux I
Résolution combinatoire des systèmes d'équations différentielles.

Heinrich Niederhausen Florida Atlantic University, Boca Raton
Polynomial Sequences of Generalized Appell Type with Coefficients of Polynomial Structure.

Jeffrey B. Remmel University of California, San Diego
Q-Rook Theory and Applications.

Christophe Reutenauer Institut de Programmation, Paris
Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, le logarithme et des représentations du groupe symétrique d'ordre les nombres de Stirling.

Dennis Stanton University of Minnesota, Minneapolis
Applications of q-Hermite Polynomials.

Loys Thimonier* Université d'Amiens
Joffroy Beauquier Université Paris-Sud
Prefix-Free Words of Length n over m Letters: Two-Sided Well-Balanced Parentheses and Palindromes.

Dennis White University of Minnesota, Minneapolis
Hybrid Tableaux.

RÉUNION D'ÉTÉ 1985 DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DU CANADA
Université Laval, Québec, du 6 au 8 juin 1985

SESSION SPÉCIALE DE COMBINATOIRE

COMMUNICATIONS (30 min.)

Henry Crapo CRMA, Un. de Montréal et INRIA, Rocquencourt
La topologie géométrique et structurale.

Myriam DeSainte-Catherine* Université de Bordeaux I
Gérard X. Viennot Université de Bordeaux I
Le nombre de tableaux de Young dont les colonnes sont de hauteur paire.

Ira Gessel Brandeis University, Waltham Mass.
Counting Acyclic Digraphs.

Ian Goulden University of Waterloo
Quadratic forms of Schur functions.

Jacques Labelle Université du Québec à Montréal
Décomposition des espèces de structures.

Clement Lam Concordia University
A computer search for projective plane of order 10.

André Longtin Université du Québec à Trois-Rivières
Nombres sécants généralisés: une solution à un problème d'étiquetage d'arbres orientés.

John McKay Concordia University
Computing Galois groups of polynomials over $\mathbb{Q}$.

Bruce Sagan Middlebury College, Middlebury Vermont
Shellability of Exponential Structures.

Claudette Tabib CEGEP Édouard-Montpetit, Longueuil Qué.
A propos des inégalités d'Erdös et Moser sur le plus grand sous-tournoi transitif d'un tournoi.

Denis Thérien Université Mc Gill, Montréal
Aspects combinatoires des groupes nilpotents.

Gérard X. Viennot Université de Bordeaux I
Théorie combinatoire des approximants de Padé.

---

* Dans le cas d'un travail conjoint, un astérisque désigne celui des auteurs présentant la communication.

TABLE DES MATIERES

PARTITIONS WITH "N COPIES OF N"

A.K. AGARWAL
Department of Mathematics
The Pennsylvania State University
University Park, PA 16802, USA

Abstract. In this short note we prove a general partition theorem involving partitions with "N copies of N". These partitions arise in the Study of Hard-Hexagon Model and have recently been studied in [1]. To exhibit the importance of our main theorem we present three particular cases which yield elegant partition identities of Rogers-Ramanujan Type. We shall also pose a very significant open problem.

1. The Main Result. We propose to prove the following:

Theorem 1. For $k \geq -3$, let $C_k(n)$ denote the number of partitions with "N copies of N" of n such that each pair of summands m_i, r_j satisfies $|m-r| > i+j+k$. Then

$$(1.1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} C_k(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n\left[1+\frac{(k+3)(n-1)}{2}\right]}}{(q;q)_n\ (q;q^2)_n},$$

here $(a;q)_n$ denote the rising 'q-factorial'.

2. Proof. Let $C_k(m,n)$ denote the number of partitions enumerated by $C_k(n)$ with the added restriction that there be exactly m parts. We shall first prove that

$$(2.1) \qquad C_k(m,n) = C_k(m,n-m) + C_k(m-1,n-km-3m+k+2) + C_k(m,n-2m+1) - C_k(m,n-3m+1).$$

To prove (2.1) we split the partitions enumerated by $C_k(m,n)$ into three classes: (i) those that do not contain k_k as a part, (ii) those that contain 1_1, as a part, and (iii) those that contain $k_k (k > 1)$ as a part. We now transform the partitions in class (i) by deleting 1 from each part ignoring the subscripts. Obviously, this transformation will not disturb the inequalities between the parts and so the transformed partition will be of the type enumerated by $C_k(m,n-m)$. Next we transform the partitions in class

(ii) by deleting the summand 1_1, and then subtracting $k+3$ from all the remaining parts ignoring the subscripts. The transformed partition will be of the type enumerated by $C_k(m-1,n-km-3m+k+2)$. Here we note that k cannot be less than -3. Finally, we transform the partitions in class (iii) by replacing k_k by $(k-1)_{k-1}$ and then subtracting 2 from all the remaining parts. This will produce a partition of $n-1-2(m-1) = n-2m+1$ into m parts. It is important to note here that by this transformation we get only those partitions of $n-2m+1$ into m parts which contain $(k-1)_{k-1}$ as a part. Therefore the actual number of partitions which belong to class (iii) is $C_k(m,n-2m+1) - C_k(m,n-3m+1)$, where $C_k(m,n-3m+1)$ is the number of partitions of $n-2m+1$ into m parts which are free from the parts like k_k. The above transformations clearly establish a bijection between the partitions enumerated by $C_k(m,n)$ and those enumerated by $C_k(m,n-m) + C_k(m-1,n-km-3m+k+2) + C_k(m,n-2m+1) - C_k(m,n-3m+1)$. Thus identity (2.1) is established.]

Let

$$f_k(z,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_k(m,n)z^m q^n \quad . \tag{2.2}$$

Then (2.1) implies that

$$\begin{aligned} f_k(z,q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Big[C_k(m,n-m)+C_k(m-1,n-km-3m+k+2) + C_k(m,n-2m+1) \\ &\qquad\qquad - C_k(m,n-3m+1)\Big] z^m q^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_k(m,n-m)(zq)^m q^{n-m} + zq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \\ &\qquad C_k(m-1,n-km-3m+k+2) \cdot (zq^{k+3})^{m-1} q^{n-m(k+3)+k+2} \\ &\quad + \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_k(m,n-2m+1)(zq^2)^m q^{n-2m+1} \\ &\quad - \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_k(m,n-3m+1)(zq^3)^m q^{n-3m+1} \\ &= f_k(zq,q) + zqf_k(zq^{k+3},q) + \frac{1}{q} f_k(zq^2,q) - \frac{1}{q} f_k(zq^3,q) \quad . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Setting $f_k(z,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{k,n}(q)z^n$, and then comparing the coefficients of z^n

on each side of (2.3), we see that

$$\lambda_{k,n}(q) = \frac{\lambda_{k,n-1}(q)\; q^{(n-1)(k+3)+1}}{(1-q^n)(1-q^{2n-1})} \tag{2.4}$$

Iterating (2.4) n times and observing that $\lambda_{k,0}(q) = 1$, we find that

$$\lambda_{k,n}(q) = \frac{q^{n\left[1 + \frac{(k+3)(n-1)}{2}\right]}}{(q;q)_n\; (q;q^2)_n} \;. \tag{2.5}$$

Therefore

$$f_k(z,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n\left[1 + \frac{(k+3)(n-1)}{2}\right]}\; z^n}{(q;q^2)_n (q;q)_n} \;. \tag{2.6}$$

Now

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} C_k(n)q^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\sum_{m=0}^{\infty} C_k(m,n)\right\} q^n = f_k(1,q)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n\left[1 + \frac{(k+3)(n-1)}{2}\right]}}{(q;q^2)_n (q;q)_n} \;.\end{aligned}$$

This completes the proof of the theorem.

3. Particular Cases. If $k=0$, Theorem 1, in view of the identity [2, I(46), p.156]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(3n-1)/2}}{(q;q)_n (q;q^2)_n} = \frac{1}{(q;q)_\infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{10n})(1-q^{10n-6})(1-q^{10n-4}) \tag{3.1}$$

reduces to

Theorem 3.1. The number of partitions with "N copies of N" of n such that each pair of summands m_i, r_j satisfies $|m-r| > i+j$ equals the number of ordinary partitions of n into parts $\not\equiv 0, \pm 4 \pmod{10}$.

Ex. For $n=6$, we have 8 relevant partitions of each kind, viz., $6_1, 6_2, 6_3, 6_4, 6_5, 6_6, 5_1+1_1, 5_2+1_1$ of the first kind and 51, 3^2, 321, 31^3, 2^3, 2^21^2, 21^4, 1^6 of the second kind.

For $k = -1$, Theorem 1 in view of the identity [2, I(61), p.158]

$$(3.2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n (q;q^2)_n} = \frac{1}{(q;q)_\infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{14n})(1-q^{14n-6})(1-q^{14n-8})$$

leads to

Theorem 3.2. The number of partitions with "N copies of N" of n such that each pair of summands m_i, r_j satisfies $|m-r| \geq i+j$ equals the number of ordinary partitions of n into parts $\not\equiv 0, \pm 6 \pmod{14}$.

Example. For $n=6$, we have 10 relevant partitions of each kind, viz., $6_1, 6_2, 6_3, 6_4, 6_5, 6_6, 5_1+1_1, 5_2+1_1, 5_3+1_1, 4_1+2_1$ of the first kind and 51, 42, 41^2, 3^2, 321, 31^3, 2^3, $2^2 1^2$, 21^4, 1^6 of the second kind.

The particular case $k = -2$ of the Theorem 1, in view of the identity [3, Eq. (3.1), p. 219]

$$(3.3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}(n^2+n)}}{(q;q)_n (q;q^2)_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^n)(1-q^{7n-2})(1-q^{7n-5})(1-q^{7n})}{(1-q^n)(1+q^{7n-1})(1+q^{7n-6})}$$

corresponds to

Theorem 3.3. The number of partitions with "N copies of N" of n such that each pair of summands m_i, r_j satisfies $|m-r| \geq i+j-1$ equals $\sum_{k=0}^{n} A_{n-k} B_k$, where A_n denote the number of partitions of n into distinct parts $\equiv 3$ or $4 \pmod 7$ and B_n denote the number of ordinary partitions of n into parts $\not\equiv 0, 4, 10 \pmod{14}$.

4. Conclusion. Theorems 3.1, 3.2 and 3.2 are nice combinatorial interpretations of Theorem 1 at $k = 0$, -1 and -2 respectively. theorems 3.1 and 3.2 are the particular cases of the main result of [1]. The most obvious question arising from this work is: Is there a reasonable combinatorial interpretation of Theorem 1 for general value of k?

REFERENCES

1. A.K. Agarwal and G.E. Andrews, Rogers-Ramanujan Identities for Partitions with "N copies of N" (Communicated).

2. L.J. Slater, Further identities of the Rogers-Ramanujan type, Proc. London Math. Soc. 54 (1951-52), pp. 147-167.

3. W.N. Bailey, On the simplification of some identities of the Rogers-Ramanujan type, Proc. London Math. Soc. (3) 1, (1951), pp. 217-221.

RELATIONS FONCTIONNELLES ET DENOMBREMENT DES HYPERCARTES PLANAIRES POINTEES

Didier ARQUES
Institut des Sciences Exactes et Appliquées
4 rue des Frères Lumière, 68093 MULHOUSE-Cédex, France

Abstract

We show here, by using two distinct geometrical decompositions of rooted planar hypermaps, that there exists two functional relations whose unique solution is the generating function enumerating rooted planar hypermaps.
Used together, these two relations allow us to obtain, without any hard formal calculus, a really simple system of parametric equations for the generating series enumerating rooted planar hypermaps by their number of vertices, faces and hyperedges. From this we get the general term of this series.
One of the above cited geometrical decompositions leads us to define a natural notion of the inner hypermap of a rooted planar hypermap. Some enumerations related to this notion are treated.

Introduction

T.R.S. Walsh utilise (cf [7]) les dénombrements sur les cartes eulériennes obtenus à partir de relations de récurrence (cf W.T. Tutte [5]) pour décompter les hypercartes planaires en fonction du nombre de brins et du nombre de faces.
On montre dans cet article, à partir de deux décompositions géométriques différentes, l'existence de deux relations fonctionnelles dont la série génératrice des hypercartes planaires pointées est unique solution. L'une de ces relations est analogue à celle établie par W.T. Tutte pour les cartes planaires pointées (cf [6] et [4]) et est obtenue en contractant une arête. L'autre utilise la décomposition géométrique que nous avons introduite dans [2], et qui consiste à contracter tout un ensemble d'arêtes.

La considération simultanée de ces deux équations permet, en évitant tout calcul formel compliqué, de déterminer très simplement un système d'équations paramétriques pour la série génératrice des hypercartes planaires pointées décomptées en fonction du nombre de sommets, de faces et d'hyperarêtes (cf théorème 3 du III).

La formule de Lagrange permet alors de donner le terme général de cette série génératrice (cf corollaire 1 du théorème 3).
Un cas particulier de ce système paramétrique permet de retrouver le dénombrement précité de T.R.S. Walsh. On donne enfin le dénombrement des hypercartes planaires pointées dont tous les sommets appartiennent à la frontière de la face extérieure. Le paragraphe I rappelle les principales définitions utilisées dans la suite.

I. Définitions et notations

Nous rappelons dans ce paragraphe les principales définitions utilisées dans la suite (cf par exemple [3] et [6]).

I.1. Définition

. Une carte planaire est une représentation de la sphère de $\mathbb{R}^3$ comme union d'un nombre fini d'ensembles disjoints appelés cellules. Elles sont de trois types

1 - les sommets qui sont des points.

2 - les arêtes qui sont des arcs simples ouverts de Jordan dont les extrémités (confondues ou non) sont des sommets.

3 - les faces qui sont des domaines simplement connexes dont les frontières sont des réunions de sommets et d'arêtes.

. Deux cellules sont dites incidentes si l'une est dans la frontière de l'autre.

. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes. (Une boucle, arête dont les extrémités sont confondues, est comptée pour deux dans le degré de son extrémité).

. Une arête est un isthme si elle est incidente à une seule face.

. Le degré d'une face est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes, les isthmes étant comptés deux fois.

I.2. On appelle brin une arête orientée de la carte planaire et on note B leur ensemble. On associe à tout brin, de façon évidente, son sommet initial, son sommet final, l'arête qui constitue son support, le brin qui lui est opposé.

. On définit la permutation α sur B qui à tout brin associe son brin opposé. α est une involution sans point fixe dont les cycles sont bijectivement associés aux arêtes de la carte.

. On note σ la permutation sur B qui à tout brin b associe le premier brin rencontré en tournant autour du sommet initial de b dans le sens positif choisi sur la sphère. Les cycles de σ sont bijectivement associés aux sommets de la carte.

. On note $\bar{\sigma}$ la permutation $\sigma \circ \alpha$ sur B. Les cycles de $\bar{\sigma}$ sont les circuits orientés constituant les frontières des faces topologiques de la carte. Les cycles de $\bar{\sigma}$ sont donc bijectivement associés aux faces de la carte.
Dans la suite, un sommet (resp. arête, face) sera, suivant le contexte, soit l'objet topologique défini au 1, soit le cycle pour σ (resp. α, $\bar{\sigma}$) qui lui est associé par les définitions ci-dessus.
Un brin est dit incident à une cellule de la carte si il appartient au cycle associé à cette cellule.

. Pour b dans B et τ permutation sur B, on note $\tau^*(b)$ le cycle pour τ engendré par b.
Si A est inclus dans B et si b est dans A, alors $\tau_{|A}(b)$ est le premier brin dans A parmi $\tau(b)$, $\tau^2(b)$, ...

. Une carte planaire est dite pointée si un brin $\tilde{b}$ est choisi. $\tilde{b}$ est appelé le brin pointé de la carte, et son sommet initial $\tilde{s}$ est appelé le sommet pointé de la carte.
On appelle alors face extérieure de la carte, la face $\bar{\sigma}^*(\tilde{b})$ engendrée par le brin pointé $\tilde{b}$. La carte réduite à un sommet est également dite pointée bien qu'elle ne contienne aucun brin.
On appelle circuit, une suite $(b_1,\ldots,b_k)$ de brins de la carte tels que l'extrémité finale de b_i soit l'extrémité initiale de b_{i+1} si $1 \leqslant i < k$, de b_1 si $i = k$.

. On représentera dans la suite une carte par une projection stéréographique sur le plan, de façon à envoyer la face extérieure de la carte sur la face infinie de sa représentation dans le plan.

. Deux cartes planaires pointées sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme de la sphère, préservant son orientation, appliquant les sommets, arêtes, faces et brin pointé de la première carte