Heidelberger Taschenbücher Band 250

Volker Böhm

Arbeitsbuch zur
Mikroökonomie II

Mit 68 Abbildungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo

Professor Volker Böhm, Ph.D.
Lehrstuhl für Volkswirtschaftslehre
und Ökonometrie I
Universität Mannheim
Postfach 10 34 62
D-6800 Mannheim 1

ISBN-13: 978-3-540-19326-5 e-ISBN-13: 978-3-642-97858-6
DOI: 10.1007/978-3-642-97858-6

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Böhm, Volker:
Arbeitsbuch zur Mikroökonomie / Volker Böhm. - Berlin; Heidelberg; New York;
London; Paris; Tokyo: Springer.
Bd. 1 mit d. Erscheinungsorten Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo
2 (1988)
(Heidelberger Taschenbücher; Bd. 250)
ISBN-13: 978-3-540-19326-5

NE: GT

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1988

2142/7130-543210

Vorwort

Der Erfolg des Arbeitsbuches zur Mikroökonomie (1984), aber auch eine konzeptionelle Neuorientierung, haben mich veranlaßt, das bisherige Werk in erweiterter Fassung in zwei Bänden herauszugeben. Dabei richtet sich Band I ausschließlich an Studenten im Grundstudium und der hier vorliegende Band II an Studenten des Hauptstudiums und an Examenskandidaten. Die einzelnen Kapitel des Arbeitsbuches II entsprechen den Gliederungspunkten einer Vorlesung in Mikroökonomik im Hauptstudium. Die Aufgaben haben das Ziel, zu jedem Bereich die wesentlichen inhaltlichen Resultate und Aussagen der Mikroökonomik exemplarisch darzustellen. Die Anwendung der methodischen Grundlagen der mikroökonomischen Analyse stehen dabei ebenso im Vordergrund wie die Vertiefung der in einer entsprechenden Vorlesung dargestellten ökonomischen Resultate. Beides zu üben und zu erlernen stellt sicherlich das Hauptziel eines vorlesungsbegleitenden Übungsbuches dar und dürfte somit eine ideale Ergänzung zu einer Vorlesung sein.

Wie in dem Vorgängerbuch wurde bei der Darstellung der Lösungen versucht, der Systematik des Lösungsweges einen breiten Raum einzuräumen, um die Leistungsfähigkeit der wenigen, aber essentiellen mathematischen Methoden in der Mikroökonomik zu demonstrieren. Pragmatische Kriterien mit dem Ziel der Lösbarkeit haben dabei die Gestaltung der Aufgaben wesentlich beeinflußt. Dies hat zu einer Mischung aus numerisch spezifizierten Aufgabenteilen mit solchen, in denen nur allgemeine Funktionsformen angegeben wurden, geführt. Viele Aufgaben entspringen unmittelbar dem exemplarischen Darstellungsbedürfnis der Vorlesung, andere wiederum stammen aus Diplomklausuren der vergangenen Jahre an der Universität Mannheim.

Inhaltlich ist Band II eine umfangreiche Erweiterung der Kapitel 3 - 7 aus dem Vorgängerbuch. Die von dort übernommenen Aufgaben wurden vollständig überarbeitet und nach der Beseitigung der leider aufgetretenen Fehler mit zum Teil neuen und besseren Lösungen versehen. Daneben stehen eine große Anzahl vollständig neuer Aufgaben, die sich zusätzlichen ökonomischen Fragestellungen widmen.

Mein Dank gilt zu allererst den Hörern meiner Vorlesung und Examenskandidaten an der Universität Mannheim, die durch zahlreiche Anregungen, Bemerkungen sowie Kritik an der ersten Ausgabe einen wertvollen Beitrag zur Neugestaltung und Erweiterung des Arbeitsbuches geleistet haben. Mein ganz besonderer Dank gilt in diesem Zusammenhang den Herren cand. rer. oec. Martin Faßnacht und Frank Trompeter, die sich mit ungewöhnlichem Engagement und nie nachlassendem Bestreben für Verbesserungen bei der Darstellung der Lösungen große Verdienste erworben haben. Die stete konzeptionelle Kritik meines Mitarbeiters Dipl.-Math. Rolf Schmachtenberg beim Entwurf von Übungsaufgaben und ihrer inhaltlichen Einbettung in den Vorlesungsstoff war für mich eine unersetzliche Quelle von Hinweisen und Anregungen bei der Neugestaltung des Buches. Den wissenschaftlichen Hilfskräften meines Lehrstuhles fiel der größte Teil der Erstellung der Diagramme sowie das Korrekturlesen zu, das sie gemeinsam mit größter Sorgfalt und Zuverlässigkeit bewältigt haben. Schließlich schulde ich einen ganz besonderen Dank meiner Sekretärin Frau Sabine Wolter für ihre nie nachlassende Sorgfalt und Geduld beim Schreiben der endgültigen Druckfassung des Buches. Ihre stete Bereitschaft und ihr Bestreben nach einem perfekten Manuskript hat trotz zahlreicher anderer Belastungen nie nachgelassen.

Mannheim, im Februar 1988 Volker Böhm

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1: Intertemporale Entscheidungen und Unsicherheit

Mehrperiodige Entscheidungsprobleme von Wirtschaftssubjekten sind fast immer eng mit denen bei Unsicherheit verknüpft. Wenn dennoch in der Literatur häufig eine getrennte analytische Behandlung vorliegt, so beruht dies auf der Tatsache, daß es sich bei den beiden Aspekten strukturell um zwei analytisch voneinander trennbare Probleme handelt, die zu ökonomisch unterschiedlichen Resultaten führen, die durch eine simultane Berücksichtigung nicht voneinander zu trennen wären.

Die ersten sechs Aufgaben dieses Abschnitts führen in einige Grundprobleme der intertemporalen Optimierung bei sequentiellen Entscheidungsabläufen in diskreter Zeit ein. Dabei wird in allen Fällen die Annahme getroffen, daß die Erwartungen der Wirtschaftssubjekte mit subjektiver Sicherheit vorliegen. Die Beschränkung dieses Abschnitts auf solche Modelle und damit die Vernachlässigung des umfangreichen Materials an Modellen mit stetiger Zeit, findet ihre Rechtfertigung zum Teil darin, daß wirtschaftliche Entscheidungsprobleme auf mikroökonomischem Niveau im Gegensatz zu physikalischen typischerweise diskreter und nicht stetiger Natur sind, ebenso wie der jeweils vorhandene Rahmen an Beobachtungsdaten. Die Übungsaufgaben sind zum Teil aus dem Bereich der mikroökonomischen Fundierung der Makroökonomik gewählt. Sie geben damit auch einen Einblick in die dort verwendeten Grundmodelle, ohne jedoch den entscheidenden Aspekt der Rationierung ausführlich zu behandeln.

Kaum eine wirtschaftliche Entscheidung in der Realität wird mit vollständiger, sicherer Kenntnis aller wichtigen Einflußgrößen getroffen. Die sich daraus ergebende Konsequenz, daß Unsicherheit einen entscheidenden Einfluß auf wirtschaftliches Verhalten haben muß, kommt in ihrer Bedeutung nur selten in den traditionellen Lehrbüchern der Mikroökonomik zur Geltung. Um so wichtiger erscheint es in einer Aufgabensammlung, einige der grundlegenden Elemente der Theorie der Entscheidung bei Unsicherheit exemplarisch vorzuführen. Dabei wurde bewußt auf fortgeschrittenes Material verzichtet. Die Aufgaben 1.7-1.13 widmen sich den grundlegenden Problemen des Entscheidungsansatzes überhaupt, d.h. der Erwartungsnutzenhypothese, dem Problem der Risikoaversion, der Investitions-, Versicherungsnachfrage sowie dem Kreditrisiko. Als allgemeine Literaturgrundlage dafür dienen die Arbeiten von Arrow (1974), Borch (1969) und Varian (1984). Probleme der Suchtheorie, der Informationsökonomik und der Finanzmärkte werden nicht behandelt. Zum weiterführenden Studium sei jedoch auf die ausgezeichneten Arbeiten von Lippmann und McCall (1981), Diamond und Rothschild (1978) und Fama und Miller (1972) hingewiesen.

Literaturhinweise

Arrow, K.J. (1974) *Essays in the Theory of Risk-bearing*, Amsterdam.

Borch, K.H. (1969) *Wirtschaftliches Verhalten bei Unsicherheit*, Wien/München.

Diamond, P. and M. Rothschild (eds.)(1978) *Uncertainty in Economics: Readings and Exercises*, New York.

Fama, E.F. and M.H. Miller (1972) *The Theory of Finance*, New York.

Lippmann, S.A. and J.J. McCall (1981) The Economics of Uncertainty: Selected Topics and Probabilistic Methods. In: Arrow, K.J. and M.D. Intriligator (eds.) *Handbook of Mathematical Economics, Vol. I*, Chapter 6, 211-284, Amsterdam.

Varian, H.R. (1984) *Microeconomic Analysis*, second edition, Chapter 3, New York.

Aufgabe 1.1

Betrachtet sei ein Haushalt, der seinen Nutzen aus dem Konsum eines nicht lagerbaren Gutes in zwei aufeinander folgenden Perioden $(c_1, c_2) \geq 0$ maximiert und nur in der ersten Periode durch Arbeitseinsatz $8 \geq \ell_1 \geq 0$ zum Lohnsatz $w_1 > 0$ ein Einkommen erzielen kann. Zur Finanzierung seines Verbrauchs in der zweiten Periode steht nur der Betrag seiner Kassenhaltung zu Beginn der zweiten Periode zur Verfügung. Die Nutzenfunktion des Haushalts sei durch

$$u(c_1, \ell_1, c_2) = 2\ln c_1 + \ln(8 - \ell_1) + \ln c_2$$

gegeben, und der für die zweite Periode erwartete Preis p_2 sei eine stetige, monoton wachsende Funktion $\psi(p_1)$ des Preises der ersten Periode $p_1 > 0$.

a) Bestimmen Sie die intertemporale Nutzenfunktion

$$v(c_1, \ell_1, m_1, p_1) = \max \left\{ u(c_1, \ell_1, c_2) \;\middle|\; m_1 \geq \psi(p_1)\, c_2 ; c_2 \geq 0 \right\},$$

und überprüfen Sie sie auf Konkavität in (c_1, ℓ_1, m_1) und Monotonie in allen Argumentvariablen.

b) Angenommen, für $p_1 = \overline{p}_1$ werde ein Preis von Null erwartet, d.h. $\psi(\overline{p}_1) = 0$. Was bedeutet dies für die intertemporale Nutzenfunktion v?

c) Ermitteln Sie mit Hilfe der intertemporalen Nutzenfunktion die Güter- und Geldnachfrage- sowie die Arbeitsangebotsfunktion in der ersten Periode für eine Anfangskassenhaltung von $m_0 \geq 0$ zu Beginn dieser Periode.

d) Überprüfen Sie die unter c) abgeleiteten Funktionen auf Stetigkeit, und stellen Sie fest, wie eine Erwartungsänderung, d.h. eine Änderung der Funktion ψ, auf diese Angebots- und Nachfragefunktionen wirkt.

Lösung:

Das Problem des Haushalts besteht darin, den Nutzen $u(c_1,\ell_1,c_2)$ unter den Nebenbedingungen $m_0 + w_1\ell_1 \geq p_1c_1 + m_1$ und $m_1 \geq \psi(p_1)\, c_2$, sowie $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $8 \geq \ell_1 \geq 0$, $m_1 \geq 0$, durch Wahl eines Vektors (c_1,ℓ_1,m_1,c_2) zu maximieren.

a) Da $u(c_1,\ell_1,c_2) = 2\ ln c_1 + ln(8 - \ell_1) + ln c_2$ für eine gegebene Entscheidung (c_1,ℓ_1,m_1) streng monoton wachsend in c_2 ist, wird die Nebenbedingung der zweiten Periode immer bindend sein, d.h. es gilt $m_1 = \psi(p_1)\, c_2$. Somit erhält man für $\psi(p_1) > 0$ als optimale Entscheidung $c_2 = m_1/\psi(p_1)$ und durch Substitution der optimalen Entscheidung in die Zielfunktion als intertemporale Nutzenfunktion

$$v(c_1,\ell_1,m_1,p_1) = 2\ ln c_1 + ln(8 - \ell_1) + ln\ m_1 - ln\ \psi(p_1)\ .$$

Da der Logarithmus eine monoton wachsende Funktion ist, $d(ln x)/dx = 1/x > 0$, folgt, daß die intertemporale Nutzenfunktion in den Argumenten (c_1,m_1) monoton wachsend und in den Argumenten (ℓ_1,p_1) monoton fallend verläuft (Beachte, daß $d\psi/dp_1 > 0$ gilt). Denn man erhält für die Ableitungen von $v(\cdot)$:

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial c_1} = \frac{2}{c_1} > 0, \quad \frac{\partial v(\cdot)}{\partial \ell_1} = -\frac{1}{8 - \ell_1} < 0,$$

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m_1} = \frac{1}{m_1} > 0, \quad \frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_1} = -\frac{1}{\psi(p_1)}\ \psi'(p_1) < 0.$$

Da sich als Hesse'sche Matrix in den ersten drei Argumentvariablen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial c_1^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial c_1 \partial \ell_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial c_1 \partial m_1} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \ell_1 \partial c_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial \ell_1^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial \ell_1 \partial m_1} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial m_1 \partial c_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial m_1 \partial \ell_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial m_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{c_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(8-\ell_1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m_1^2} \end{bmatrix}$$

ergibt, überprüft man die Konkavität (Negativsemidefinitheit) anhand der Vorzeichen der Hauptminoren. Für diese ergibt sich $H_1 = -2/c_1^2 < 0$, $H_2 = 2/c_1^2(8-\ell_1)^2 > 0$, $H_3 = -2/c_1^2(8-\ell_1)^2 m_1^2 < 0$, so daß die intertemporale Nutzenfunktion v konkav in den ersten drei Variablen (c_1,ℓ_1,m_1) sein muß.

b) Da $u(c_1,\ell_1,c_2)$ streng monoton wachsend in c_2 ist, folgt aus $\psi(\bar{p}_1) = 0$, daß kein maximales c_2 existiert, denn c_2 ist unbeschränkt. Die intertemporale Nutzenfunktion ist in einem solchen Fall nicht mehr definiert.

c) Mit Hilfe der intertemporalen Nutzenfunktion läßt sich das eingangs beschriebene Optimierungsproblem des Haushalts äquivalent zu dem folgenden Problem umformen:

$$\max_{(c_1,\ell_1,m_1)} v(c_1,\ell_1,m_1,p_1)$$

unter der Nebenbedingung

$$p_1c_1 + m_1 \leq w_1\ell_1 + m_0$$

und

$$c_1 \geq 0, \quad 8 \geq \ell_1 \geq 0, \quad m_1 \geq 0.$$

Als Lagrangefunktion erhält man

$$\mathcal{L} = v(c_1,\ell_1,m_1,p_1) + \lambda[m_0 + w_1\ell_1 - p_1c_1 - m_1] + \mu\ell_1,$$

wobei die Nebenbedingungen $c_1 \geq 0$, $8 \geq \ell_1$, $m_1 \geq 0$ nicht in die Lagrangefunktion aufgenommen wurden, da diese Beschränkungen nie bindend sein können. Als notwendige und hinreichende (vgl. Teil a)) Bedingungen für ein Optimum ergeben sich dann:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = \frac{\partial v(\cdot)}{\partial c_1} - \lambda p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell_1} = \frac{\partial v(\cdot)}{\partial \ell_1} + \lambda w_1 + \mu = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_1} = \frac{\partial v(\cdot)}{\partial m_1} - \lambda = 0,$$

$$\lambda[m_0 + w_1\ell_1 - p_1c_1 - m_1] = 0.$$

Da $\partial v(\cdot)/\partial m_1 > 0$ für alle $m_1 > 0$ gilt, folgt $\lambda > 0$ und damit $m_0 + w_1\ell_1 = p_1c_1 + m_1$. Aus der Elimination von λ ergeben sich außerdem die Bedingungen $2m_1 = p_1c_1$ und $m_1 = w_1(8 - \ell_1)$ für $\ell_1 > 0$. Aus diesen drei Gleichungen errechnet man als Nachfrage- bzw. Angebotsfunktionen:

$$c_1(p_1, w_1, m_0) = \max\left\{\frac{m_0 + 8w_1}{2p_1}, \frac{2m_0}{3p_1}\right\},$$

$$\ell_1(p_1, w_1, m_0) = \max\left\{\frac{24w_1 - m_0}{4w_1}, 0\right\},$$

$$m_1(p_1, w_1, m_0) = \max\left\{\frac{m_0 + 8w_1}{4}, \frac{m_0}{3}\right\}.$$

d) Wie aus der Lösung von c) ersichtlich ist, sind die Angebots- und Nachfragefunktionen von der Erwartungsfunktion ψ unabhängig, so daß eine Veränderung der Erwartungen ψ keinen Einfluß auf diese Funktionen hat.

Da die Funktionen $f_1(p_1, w_1, m_0) = m_0 + 8w_1/2p_1$ und $f_2(p_1, w_1, m_0) = 2m_0/3p_1$ stetig sind, muß auch $c_1(p_1, w_1, m_0) = \max\{f_1(p_1, w_1, m_0), f_2(p_1, w_1, m_0)\}$ als maximaler Wert der beiden Funktionen stetig sein.

Analog kann überprüft werden, daß $\ell_1(\cdot)$ und $m_1(\cdot)$ stetige Funktionen sind.

Aufgabe 1.2

Eine Firma sei im Besitz einer Technologie, die es ihr erlaubt, mit zwei Faktoren $(v_1, \ell_1) \in \mathbb{R}_+^2$ ein Gut $x_1 \in \mathbb{R}_+$ gemäß der Produktionsfunktion $x_1 = (v_1 \ell_1)^{1/4}$ herzustellen.

Da die Produktionsdauer gerade eine Periode beträgt, kann der in der ersten Periode produzierte Output x_1 erst in der zweiten Periode zum erwarteten Preis $\overline{p}_2 > 0$ abgesetzt werden. Die Inputkäufe müssen jedoch bereits in der ersten Periode zu den Preisen $q_1 > 0$ und $w_1 > 0$ vorgenommen werden.

a) Angenommen, der Firma steht nur ein Betrag $y_1 > 0$ zur Finanzierung von Inputkäufen in der ersten Periode zur Verfügung. Bestimmen Sie den maximal möglichen monetären Ertrag, den die Firma mit y_1 erwirtschaften kann, als Funktion des eingesetzten Betrages y_1 und der Faktorpreise.

b) Zeichnen Sie für die Faktorpreise $q_1 = 1$, $w_1 = 4$ und den erwarteten Absatzpreis $p_2 = 24$ die unter a) hergeleitete Ertragsfunktion und ihre Ableitung bezüglich y_1 in ein Schaubild.

c) Angenommen, der Firma stünde ein finanzielles Vermögen $A_0 > 0$ zu Beginn der ersten Periode zur Verfügung. Außer der Investition in den Produktionsprozeß sei es ihr möglich, Kredit $k_1 \geq 0$ zum Zinssatz $r_k = 0{,}5$ aufzunehmen, der in der folgenden Periode zuzüglich der Zinsen zurückgezahlt werden muß. Andererseits sei eine Geldanlage $b_1 \geq 0$ zum Zinssatz $r_b = 0{,}2$ möglich. Der angelegte Betrag wird ebenfalls in der folgenden Periode einschließlich Zinsen zurückgezahlt. Wieviel wird die Firma bei den in b) gegebenen Preisen in die Produktion einsetzen, wieviel Kredit wird sie aufnehmen, und wieviel Geld wird sie anlegen, wenn sie den Ertrag aus diesen Anlageformen maximieren will und

(i) $A_0 = 9$,

(ii) $A_0 = 18$,

(iii) $A_0 = 36$ beträgt?

d) Zeigen Sie anhand dieses Modells die Gültigkeit der Aussage des Modigliani-Miller-Theorems, daß bei gleichem Kredit- und Anlagezinssatz der in die Produktion investierte Betrag unabhängig vom Anfangsvermögen A_0 ist.

Lösung:

a) Der monetäre Ertrag, den die Firma erwirtschaften kann, wenn sie in der ersten Periode einen Faktoreinsatz (v_1, ℓ_1) leistet, beträgt $p_2 x_1 = p_2(v_1\ell_1)^{1/4}$. Da annahmegemäß nur der Betrag y_1 zum Kauf von Faktoren zur Verfügung steht, muß $q_1v_1 + w_1\ell_1 \leq y_1$ gelten. Die optimale Faktoreinsatzmenge erhält man dann als Lösung des Maximierungsproblems:

Maximiere $p_2(v_1\ell_1)^{1/4}$ unter den Nebenbedingungen

$q_1v_1 + w_1\ell_1 \leq y_1$ und $v_1 \geq 0$, $\ell_1 \geq 0$.

Da $v_1 = 0$ oder $\ell_1 = 0$ aufgrund der Produktionsfunktion $(v_1\ell_1)^{1/4}$ offensichtlich keinen Maximierer beschreiben, kann die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = p_2(v_1\ell_1)^{1/4} - \lambda\,(y_1 - q_1v_1 - w_1\ell_1)$$

angesetzt werden. Anhand der Hesse'schen Matrix der Produktionsfunktion

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} v_1^{-7/4} \ell_1^{1/4} & \frac{1}{16} v_1^{-3/4} \ell_1^{-3/4} \\ \frac{1}{16} v_1^{-3/4} \ell_1^{-3/4} & -\frac{3}{16} v_1^{1/4} \ell_1^{-7/4} \end{bmatrix}$$

überprüft man leicht, daß die Hauptminoren $-(3/16)v_1^{-7/4} \ell_1^{1/4} < 0$ und $(1/32)v_1^{-3/2} \ell_1^{-3/2} > 0$ von negativ nach positiv alternieren. Damit ist die Hesse'sche Matrix der Produktionsfunktion negativsemidefinit und die Zielfunktion des Problems ist konkav.

Als notwendige und hinreichende Bedingungen für ein Maximum ergeben sich somit die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_1} = \frac{p_2}{4} v_1^{-3/4} \ell_1^{1/4} - \lambda q_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell_1} = \frac{p_2}{4} v_1^{1/4} \ell_1^{-3/4} - \lambda w_1 = 0,$$

$$\lambda [y_1 - q_1 v_1 - w_1 \ell_1] = 0.$$

Da $\lambda = (p_2/4w) v_1^{1/4} \ell_1^{-3/4}$ für positive Preise größer als Null ist, folgt $y_1 = q_1 v_1 + w_1 \ell_1$ und durch Eliminierung von λ ergibt sich $q_1 v_1 = w_1 \ell_1$. Als Optimierer des Maximierungsproblems erhält man damit

$$v_1 = \frac{y_1}{2q_1} \quad \text{und} \quad \ell_1 = \frac{y_1}{2w_1} .$$

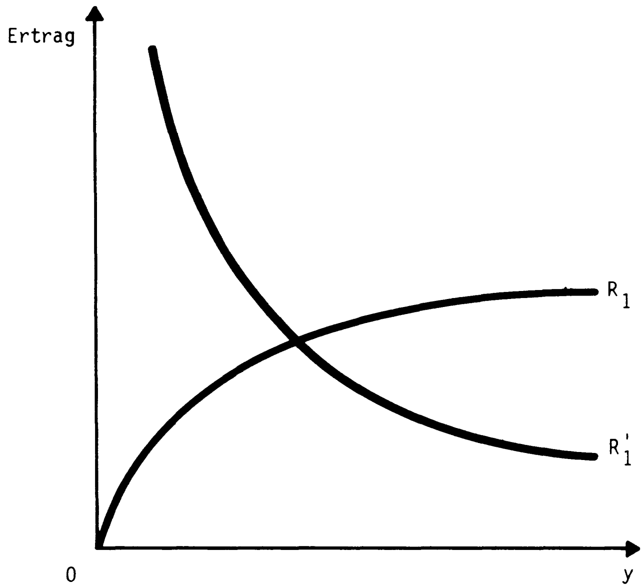
Der maximale Ertrag ist somit eine Funktion $R_1(y_1, q_1, w_1)$, die von dem eingesetzten Betrag y_1 und den Faktorpreisen (q_1, w_1) abhängt:

$$R_1(y_1, q_1, w_1) = p_2 \left(\frac{y_1}{2q_1}\right)^{1/4} \left(\frac{y_1}{2w_1}\right)^{1/4} = p_2\, q_1^{-1/4}\, w_1^{-1/4} \left(\frac{y_1}{2}\right)^{1/2} .$$

b) Für einen Preisvektor $(p_2, q_1, w_1) = (24,1,4)$ erhält man als Ertragsfunktion:

$$R_1(y_1) = 12\sqrt{y_1} \qquad \text{und als Ableitung}$$

$$R'_1(y_1) = 6\, y_1^{-1/2} \;.$$



Aus der Abbildung wird deutlich, daß der mit y_1 aufgrund der gegebenen Technologie und den gegebenen Preisen maximal mögliche Ertrag mit steigendem Kapitaleinsatz y_1 zwar steigt, daß die Grenzrendite jedoch kontinuierlich fällt.

c) Durch die Berücksichtigung einer alternativen Anlageform b_1 mit konstantem Zinssatz $r_b = 0{,}2$ und der Möglichkeit Kredit aufzunehmen, wird die Entscheidung des Unternehmens darüber, wie es sein Anfangsvermögen A_0 anlegen soll, zu einem Investitionsproblem, das wie folgt beschrieben ist:

Wähle (b_1, k_1, y_1) so, daß $R_1(y_1) + (1+r_b)b_1 - (1+r_k)k_1$ maximiert wird unter den Nebenbedingungen

$$y_1 + b_1 - k_1 = A_0, \quad y_1 \geq 0, \quad b_1 \geq 0, \quad k_1 \geq 0.$$

Die zugehörige Lagrangefunktion lautet dann:

$$\mathcal{L} = R_1(y_1) + (1+r_b)b_1 - (1+r_k)k_1 + \lambda[A_0 + k_1 - y_1 - b_1]$$

$$+ \mu_1 b_1 + \mu_2 k_1 + \mu_3 y_1.$$

Da die Zielfunktion, wie im Schaubild unter b) zu sehen ist, konkav verläuft, ergeben sich als notwendige und hinreichende Bedingungen für ein Maximum, daß

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_1} = (1+r_b) - \lambda + \mu_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_1} = -(1+r_k) + \lambda + \mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = R_1'(y_1) - \lambda + \mu_3 = 0,$$

$$\lambda[A_0 + k_1 - y_1 - b_1] = 0, \quad \mu_1 b_1 = 0, \quad \mu_2 k_1 = 0, \quad \mu_3 y_1 = 0,$$

erfüllt sein muß. Aus den ersten beiden Gleichungen folgt unmittelbar, daß $\mu_1 + \mu_2 = r_k - r_b > 0$ gilt. Somit kann eine Lösung mit $b_1 > 0$ und $k_1 > 0$ nie optimal sein, d.h. die Firma wird nie gleichzeitig Kredit aufnehmen und Geld anlegen. Aus der dritten Gleichung folgt $\lambda = R_1'(y_1) + \mu_3 > 0$, denn $R_1'(y_1)$ ist für alle y_1 streng positiv, und damit $A_0 + k_1 = y_1 + b_1$ mit $k_1 b_1 = 0$.

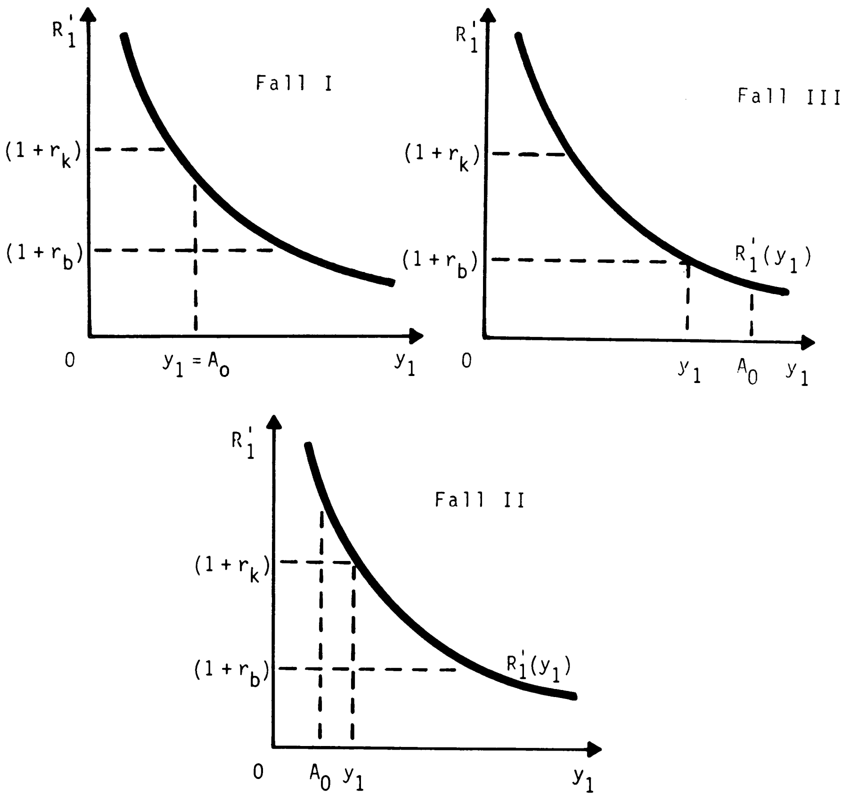
Fall I: $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$.
Es folgt $k_1 = b_1 = 0$ und $y_1 = A_0$. Außerdem muß

$$(1+r_k) > R_1'(A_0) > (1+r_b)$$

gelten.

<u>Fall II</u>: $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$.
Es folgt $b_1 = 0$ und $R_1'(y_1) = (1+r_k)$. Die letzte Bedingung bestimmt das optimale y_1 und über das Budget folgt $k_1 = y_1 - A_0$.

<u>Fall III</u>: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$.
Es folgt $k_1 = 0$ und $R_1'(y_1) = (1+r_b)$. Außerdem muß $b_1 = A_0 - y_1$ gelten.
Die folgende Abbildung zeigt die drei Fälle:



Für die Zinssätze $(r_k, r_b) = (1/2, 1/5)$ und die Grenzertrags-funktion $R_1'(y_1) = 6y_1^{-1/2}$ folgt:

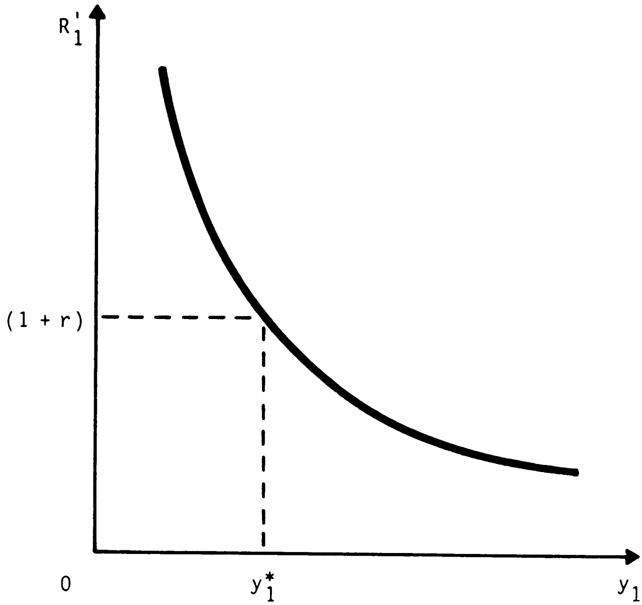
(i) $A_0 = 9$ und $6y_1^{-1/2} = R_1'(y_1) \stackrel{!}{=} (1 + r_k) = 1{,}5$ implizieren
$y_1 = 16, \quad k_1 = 7, \quad b_1 = 0.$

(ii) $A_0 = 18$ und $y_1 = 18, \quad b_1 = 0, \quad k_1 = 0,$ denn
$(1 + r_k) = 1{,}5 > R_1'(18) = \sqrt{2} > 1{,}2 = (1 + r_b).$

(iii) $A_0 = 36$ und $6y_1^{-1/2} = 1{,}2$ implizieren
$y_1 = 25, \quad b_1 = 11, \quad k_1 = 0.$

Offensichtlich entspricht (ii) dem oben diskutierten Fall I, (i) dem Fall II und (iii) dem Fall III.

d) Falls $r = r_b = r_k$ gilt, so überprüft man anhand der notwendigen Bedingungen unter c) unmittelbar, daß $R_1'(y_1^*) = (1 + r)$ immer erfüllt sein muß. Die Firma wird also immer den gleichen Betrag y_1^* in die Produktion einsetzen, unabhängig vom Eigenkapital A_0. Die Kreditaufnahme ergibt sich dann als $k_1 = \max\{y_1^* - A_0, 0\}$ und die Geldanlage als $b_1 = \max\{A_0 - y_1^*, 0\}$. Das folgende Schaubild verdeutlicht diesen Zusammenhang noch einmal.


R'1
(1 + r)
0
y*1
y1