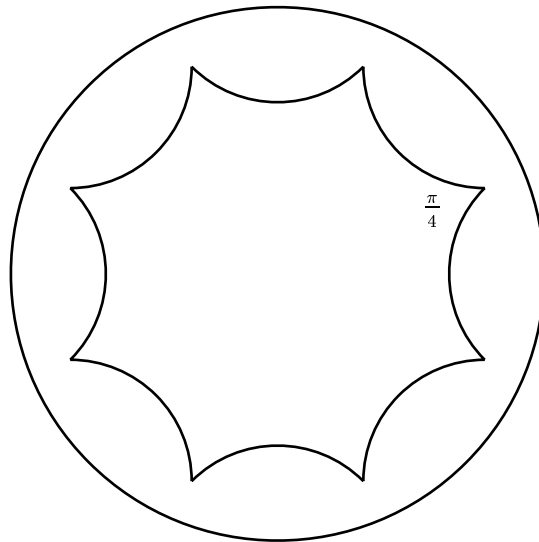


Ipotesi per una introduzione alla
Meccanica dei fluidi

Giovanni Gallavotti



Roma 1996

Giovanni Gallavotti
Dipartimento di Fisica I^a Università di Roma, La Sapienza
P.le A. Moro 2, 00185 Roma, Italia

Copie possono essere ottenute scrivendo a:
CNR-GNFM, via S. Marta 13a, 50139 Firenze, Italia, *tel* 39-55-496912, *fax*
39-55-475915
ovvero su internet alla pagina *Mathematical Physics preprints* su:
<http://chimera.roma1.infn.it>

#####

In copertina: Ordine e Caos, (libera reinterpretazione ad opera dell' Autore di una ben nota immagine)

Il suo fascino suggerisce al *Credente* una prova dell' esistenza dell' "Essere Perfettissimo" (sebbene sfuggì al, pur gesuita, Saccheri perché la sua Fede fu offuscata dalla passione per Euclide, [Sh]). Suggerisce all' *Artista* il "sublime" (ma l' Escher la ritenne troppo spoglia e volle corromperla aggiungendovi orpelli non necessari). Propone al *Musico* uno strumento ricco di note sì strane e disordinate che ancora nessuno ha osato, o potuto, creare uno spartito che lo utilizzasse selezionandone le meravigliose armonie che certo contiene. Al *Fisico* fornisce il paradigma del Caos nella Meccanica Classica e apre la via a riconoscere il Caos anche nella Meccanica Quantica, [Gu], che ancora qualcuno, che "cerchiato ha il senno di fredda tenebra", vorrebbe invece non caotica e affatto regolare. Al *Matematico* evoca un Gruppo Fuchsiano (o talvolta un ottagono).

Due parole sulla tecnica usata: l' immagine è disegnabile con *la riga e il compasso*, come tutte le figure nobili e a conferma della sua natura divina. Una volta disegnata è stata trascritta in **postscript** per essere comunicata. È a colori (anche se non si vedono): sia *rossa* assolutamente uniforme, il rosso dei tramonti romani nei ricordi d' infanzia, la stella ottagonale centrale e sia *nero*, il nero del vuoto cosmico, il colore della regione del cerchio esterna alla stella.

La sua esecuzione (con riga e compasso) è benefica nei momenti di solitudine.

Introduzione

Si resta colpiti dalla sostanziale identità concettuale dei problemi che si incontrano nello studio teorico dei fenomeni fisici. È assolutamente inaspettata e sorprendente: che si studi la Meccanica Statistica dell' Equilibrio, o la Teoria dei Campi Quantizzati, la fisica dello stato solido, la Stabilità in Meccanica, la Meccanica Celestiale, l' Analisi Armonica, la Teoria della Elasticità, la Relatività Generale o ancora la Meccanica dei Fluidi e il Caos della Turbolenza.

Così quando nel 1988 mi venne assegnata la cattedra di Meccanica dei Fluidi alla Sapienza, non tanto come riconoscimento per il lavoro svolto nel campo ma piuttosto per aggirare l' opposizione di colleghi che mal vedevano che mi fosse attribuita una cattedra di Meccanica, dalla quale avrei potuto avere influenza sulla politica culturale della Fisica Matematica a Roma, non mi preoccupai eccessivamente nonostante la consapevolezza di essere un pó "fuori posto".

Il soggetto è vastissimo e dunque in questo decennio non ho potuto fare altro che aggirarmi alla ricerca di qualcosa che fosse alla portata dei metodi e idee derivanti dalle mie esperienze precedenti.

La prima grande sorpresa fu constatare che la teoria matematica dei moti dei fluidi è in uno stato ancora piú primitivo di quanto fossi consapevole. Ciononostante mi pare ancora che una discussione dettagliata dei problemi matematici sia essenziale per chi voglia cimentarsi con la ricerca sui fluidi. Ho quindi dedicato (§11%16) alle teorie di Leray e di Scheffer, Caffarelli, Kohn, Nirenberg sulla equazione di Navier Stokes incomprimibile tutto lo spazio necessario ad una loro completa esposizione, tratta dai lavori originali.

Tale analisi è preceduta da una lunga discussione di aspetti fenomenologici che riguardano le equazioni dei fluidi e le loro proprietà con particolare attenzione al significato delle varie approssimazioni.

Perché non si deve dimenticare che le equazioni dei fluidi *non hanno* natura fondamentale, ossia sono in ultima analisi equazioni fenomenologiche ed è necessario aver presente che per questo motivo non si può loro domandare "troppo". Per porre le domande appropriate è necessario dominare gli aspetti fenomenologici ed euristici della teoria. Non ho potuto far di meglio che seguire il volume di Landau e Lifshitz cercando di estrarre da esso un insieme coerente di proprietà senza ovviamente poterlo né volerlo riprodurre interamente (cosa che sarebbe stata comunque inutile) e tralasciando la maggior parte dei temi che quel ricchissimo trattato agile e moderno copre e che comunque il lettore non potrà tralasciare di studiare.

Ho inserito in questo materiale introduttivo (§1%10) vari spunti moderni tratti da lavori di cui sono venuto a conoscenza o per comunicazione di

collegli o per partecipazione a conferenze. Quá e lá ci sono alcune idee originali, o che almeno non ho trovato nella letteratura.

La seconda parte del volume è dedicata alla teoria qualitativa e fenomenologica delle soluzioni dell'equazione di Navier Stokes incomprimibile: infatti la mancanza di teoremi di esistenza e unicità di soluzioni non ha avuto praticamente alcuna conseguenza sulla ricerca. Gli ingegneri impavidi scrivono immani programmi che dovrebbero produrre soluzioni delle equazioni: non si preoccupano affatto, quando ne sono coscienti (il che purtroppo non è sempre), che quello che studiano *non sono* le equazioni di Navier Stokes bensì il programma informatico da loro stessi elaborato. *Nessuno* è oggi in grado di scrivere un algoritmo che in un tempo noto *a priori* produca, entro una prefissata approssimazione, come risultato il calcolo di una proprietà qualsiasi (ad esempio la velocità del fluido in un punto dato) di una soluzione dell'equazione di NS con dato iniziale non "piccolissimo" o "specialissimo". Affermazioni in contrario non sono rare, neppure sulla grande stampa: ma sono errate.

Da questo non si deve però dedurre che gli ingegneri o i fisici che producono impressionanti quantità di lavori sulle "soluzioni" delle equazioni di NS siano dedicati a inutile e risibile lavoro. Al contrario è lavoro necessario e altamente qualificato. È però importante cercar di capire in che senso il loro lavoro si possa disporre nel quadro galileiano che vuole che la natura sia scritta in caratteri matematici. A tal questione ho dedicato una parte sostanziale del volume (§17-§27): in questa espongo le idee e i metodi *descrittivi* o *cinematici* che vengono utilizzati nella ricerca corrente (o almeno in quella parte della ricerca corrente che riesco a seguire). Sono idee, nate dai lavori di Lorenz e Ruelle-Takens, in parte basate sulla teoria della stabilità e biforcazione e in parte di assai più largo respiro.

I fenomeni caotici sono assai "di moda": su di essi si è scritto molto perché attraggono l'attenzione anche di chi si diletta di divulgazione scientifica e di filosofia. Ma la loro percezione è spesso distorta perché, pur di rendere interessante per il pubblico non specializzato quanto si scrive, si fanno affermazioni forti ma ambigue. Quali ad esempio "il determinismo è finito": che è un'affermazione che se ha qualche fondamento di verità certamente trascura di sottolineare che nulla cambia per chi ha cara una visione deterministica della realtà fisica (categoria alla quale tutti i colleghi che conosco appartengono) o per chi la ebbe cara (come ad esempio Laplace) quando la "teoria del caos" ancora non era.

Quindi nella discussione delle proprietà caotiche dei moti più semplici dei fluidi non mi occupo affatto delle questioni filosofiche e di interpretazione semantica delle parole che illustrano proprietà oggettive. Anche se l'aspetto di questa parte del volume è poco tecnico in apparenza è in realtà una parte *molto* tecnica e colleziona in una lunga sequenza logica una notevole mole di passi, ciascuno talmente semplice da non richiedere dettagli tecnici.

Mi pare molto importante che chi si interessa di questioni filosofiche legate alla Scienza (e io direi quindi, semplicemente, chiunque si interessi di questioni scientifiche) debba necessariamente dedicare il tempo neces-

sario alla piena comprensione degli strumenti tecnici indispensabili (quali la Geometria, il Calcolo e la Fisica Newtoniana) indicati già in parte da Galileo. È illusorio pensare di poter apprezzare anche superficialmente la Scienza moderna (cioè la Scienza, perché è fuori del tempo e l'aggettivo si riferisce ad accidenti) senza questi strumenti: la divulgazione è talvolta terribilmente prossima alla mistificazione.

La discussione è finalizzata sia alla descrizione dell'inizio della turbolenza seguendo le idee di Ruelle–Takens sia, e soprattutto, alla discussione del *principio di Ruelle*. È questo un principio che è stato a mio avviso assolutamente sottovalutato, forse per la sua natura piuttosto astrusa o, direi meglio, veramente originale. Ne venni a conoscenza in occasione di un seminario di Ruelle nel 1973: e ricordo ancora quanto fui colpito dall'audacia e novità dell'idea. Fin da allora iniziai a meditare su come tradurla in applicazioni concrete; cosa non facile. Nei paragrafi conclusivi (§31–§34) espongo alcune recenti proposte di applicazione.

Dedico poi il §28 alla costruzione di distribuzioni invarianti (stazionarie) delle equazioni di NS: esponendo idee euristiche raccolte nella letteratura e che mi paiono di un certo interesse anche se piuttosto lontane da applicazioni sia fisiche che matematiche (o dalla soluzione del problema).

La teoria di Kolmogorov K41 che non può mancare in un moderno testo, per quanto introduttivo, è esposta nel §29; mentre nel §30 descrivo alcuni recenti lavori numerici che a mio avviso hanno portato idee nuove nella teoria dei fluidi (la multifrattalità): è questa una scelta della cui parzialità mi rendo conto; e in parte è solo dovuta ad esigenze di spazio. In parte però è una scelta fatta perché riguarda lavori di ricercatori dell'area romana e che quindi vertono su temi che mi sono più familiari.

Gli ultimi quattro paragrafi contengono varie idee recenti sviluppate proprio mentre svolgevo i corsi di Meccanica dei Fluidi. Si tratta spesso di tematiche recentissime e che forse fra qualche anno non avranno più alcun interesse. Tuttavia confido che il lettore mi perdonerà questa temerarietà ritenendola giustificata a compimento di un lavoro in cui ho cecato di esporre solo risultati classici e ben stabiliti.

Ho fatto attenzione a che il volume fosse autocontenuto: non perché volessi evitare riferimenti alla letteratura (che anzi ci sono, salvo involontarie omissioni), ma per presentare un punto di vista completo e unitario. Così fra i problemi (la maggior parte dei quali è corredata da un dettagliato suggerimento per la soluzione) ho inserito una notevole quantità di risultati che li rendono in un certo senso più interessanti del testo stesso. Ho cercato di porre in forma di problemi a soluzione guidata risultati che potrebbero figurare bene nel testo stesso, perché tratti da altre opere o riassunti il loro contenuto. Chi riterrà di usare questo libro come testo per una introduzione alla Meccanica dei Fluidi dovrebbe cercare di svolgerli tutti in dettaglio e senza ricorrere alla letteratura citata: credo che questo sia essenziale per dominare una materia che è facile solo all'apparenza. *

* Fra i problemi si troveranno alcuni risultati classici (quali ad esempio la teoria delle maree) ma anche 1) la fenomenologia dei continui non omogenei e chimicamente attivi, 2) la formula di Stokes, 3) moto ondoso, 4) la teoria delle equazioni ellittiche in domini

La disponibilità di calcolatori rende la compilazione, una volta terribile, degli indici analitici facile e automatica. Forse "leggere" gli indici può fornire, quindi, qualche informazione maggiore di quanto tradizionalmente ci si aspetti, anche se temo di non aver fatto un uso davvero soddisfacente di questa possibilità offerta dalla tecnologia moderna.

Infine: perché ho scritto questo volume in italiano? ma per una donchiescottesca protesta contro l'uso di vocaboli inglesi che infestano sempre più la nostra cultura! I direttori di telegiornali, di giornali, gli uomini di governo e di "cultura", presentatori televisivi e giornalisti sportivi, sono lanciati in una squallida gara per la corruzione della lingua; il governo è un *team*, una commissione è un' *authority*, il pubblico una *audience*, e poi c'è il *marketing*, il *prime rate*, l' *import*, l' *export* il partito che fa da *sponsor* per una nomina RAI (mutuando dall'inglese perfino termini di una lingua dichiarata inutile e nell'oblio), la facilità d'uso di un ordinatore diventa il *computer no problem*, il sicario è un *killer* ed è inutile continuare.

Questi signori celano la loro mediocrità, ignoranza e incapacità di comunicare idee (o mancanza delle medesime) dietro parole che pur sanno che molti non capiscono o comprendono solo vagamente: è un'azione violenta e sprezzante, che torna anche loro utile in quanto può servire a mantenere in soggezione chi conviene che resti in tale stato. Ma come non sa (o sai) che c'è il *ticket* da pagare (per una visita medica o per parcheggiare l'auto)? che l' *optional* non è *free* o non sa (o sai) che l' *intercity* richiede un supplemento? e che nel *prime time* non si possono dare spettacoli di un qualche contenuto?

La mia protesta non è dunque contro l'inglese: lingua nobilissima e dotata di una dignità che ormai ci è sconosciuta.

Ringrazio colleghi e studenti per l'aiuto datomi nella correzione di queste note. In particolare il Dr. F. Bonetto e il Dr. G. Gentile: alcune considerazioni emerse in interminabili discussioni con loro hanno influenzato il testo, soprattutto quello degli ultimi paragrafi, evitandomi talvolta errori o imprecisioni.

Roma, Luglio 1996.

regolari e la teoria dell'equazione di Stokes, 5) il moto degli anelli di fumo, 6) la teoria di Wolibner-Kato dell'equazione di Eulero a 2 dimensioni, 7) la teoria del potenziale necessaria per la teoria di Leray, 8) le disuguaglianze di Sobolev necessarie alla teoria CKN, 9) varie questioni sulle simulazioni numeriche, 10) qualche dettaglio di teoria della biforcazione, 11) cenni alle frazioni continue e ai flussi geodetici su superfici a curvatura negativa costante, 12) i teoremi ergodici di Birkhoff e Oseledec, 13) la teoria degli esponenti di Lyapunov per i sistemi dinamici iperbolici, 14) questioni di teoria dell'informazione. Credo che fino all'ultimo capitolo, che è dedicato a temi oggetto di ricerca più avanzata, l'unico teorema che uso e di cui non includo l'idea di dimostrazione nel testo o fra i problemi sia il teorema della varietà centrale (perché non sono riuscito a rendere ragionevolmente corta la sua dimostrazione, pur elementare). Molti teoremi sono esplicitamente presentati fra i problemi con la dimostrazione presentata descrivendone le idee in forma succinta o, raramente, in forma euristica. Il ricorso a considerazioni euristiche è stato essenzialmente motivato dal fatto che mi pare che troppo spesso manchi nella letteratura un'illustrazione delle idee, veramente semplici almeno nei casi che le hanno generate, che sono alla base di dimostrazioni a volte apparentemente complesse.

Indice

CAPITOLO I: Generalità sui continui	1
1 Continui	3
2 Equazioni generali e incomprimibili	16
3 Il metodo dei riscaldamenti e la valutazione delle approssimazioni	24
4 Alcuni problemi di idrostatica	32
5 Il problema della convezione. Equazioni di Rayleigh	44
6 Campi incomprimibili. Potenziale vettore. Decomposizione di un campo generale	54
7 Legge di conservazione della vorticità per l'equazione di Eulero. Potenziali di Clebsch e forma hamiltoniana delle equazioni di Eulero. I fluidi bidimensionali	67
CAPITOLO II: Algoritmi empirici e teoria di Leray	85
8 Fluidodinamica incomprimibile di Eulero e Navier-Stokes. Primi algoritmi di soluzione empirica. Metodo dell' attrito ausiliario e confronto con l' equazione del calore	87
9 Un' altra classe di algoritmi empirici. Il metodo spettrale. Il problema di Stokes. Analogia giroscopica.	103
10 Algoritmi vorticosi per fluidi incomprimibili di Eulero e Navier-Stokes. Il caso $d = 2$. 123	
11 Algoritmi vorticosi per fluidi incomprimibili di Eulero e Navier-Stokes. Il caso $d = 3$. 131	
12 Il metodo spettrale e teoremi di esistenza, regolarità e unicità locali per le equazioni di E e NS, $d \geq 2$	145
13 Teoremi di esistenza debole globale per NS. Autoregolarizzazione, esistenza, regolarità e unicità per $d = 2$	159
14 Regolarità: risultati parziali per l' equazione di NS a $d = 3$. La teoria di Leray	179
15 La dimensione frattale delle singolarità dell' equazione di Navier Stokes, $d = 3$	199
16 Omogeneità locale e regolarità. La teoria CKN	207
CAPITOLO III: Turbolenza incipiente e caos	229
17 La teoria dei fluidi in mancanza di teoremi di esistenza e unicità per le equazioni della fluidodinamica. I modelli di Rayleigh e di Lorenz. Equazioni di NS troncate. Modelli di Rayleigh e Lorenz	231
18 Inizio della turbolenza. Cenni di teoria della biforcazione	243
19 Scenari del Caos	261
20 Tavole dinamiche	277
21 Ordinamento del Caos. La descrizione quantitativa dei moti caotici, prima della	

turbolenza sviluppata. Spettro continuo	289
22 Ordinamento del Caos. Osservazioni cadenzate. Dati casuali	305
23 Ordinamento del Caos. Sistemi dinamici di vario tipo. Statistica di un insieme attraente	317
24 Ordinamento del Caos. Basi dinamiche ed esponenti di Lyapunov	329
25 Statistiche SRB. Attrattori ed insiemi attraenti. Dimensione frattale.	347
26 Ordinamento del Caos. Entropia e complessità	364
27 Dinamica simbolica. Modello di Lorenz. Principio di Ruelle	378
CAPITOLO IV: Alta turbolenza	397
28 Turbolenza sviluppata. Integrazione funzionale.	399
29 Fenomenologia della turbolenza sviluppata e leggi di Kolmogorov	409
30 Il modello a strati. Statistiche multifrattali	425
31 Viscosità, reversibilità e dissipazione irreversibile.	434
32 Reversibilità. Assioma C. Ipotesi caotica.	444
33 L' ipotesi caotica, il teorema di fluttuazione e la reciprocità di Onsager	454
34 La struttura dell' attrattore per le equazioni di Navier–Stokes	466
Bibliografia	480
Indice dei nomi	489
Indice analitico	491
Indice delle citazioni	497

Capitolo I

Continui e generalità sulle loro equazioni

Viscosità cinematica di	cm^2/sec
Mercurio	0.012
Aria	0.150
Acqua	0.01
Alcool	0.022
Glicerina	6.8
Bronzo	$+\infty$

§1: *Continui.*

Un *continuo omogeneo* e chimicamente inerte in d dimensioni è descritto da:

- (a) Una regione Ω di spazio ($\Omega \subset R^d$), che dà il volume occupato.
- (b) Una funzione $P \rightarrow \rho(P) > 0$ definita su Ω che dà la *densità di massa*.
- (c) Una funzione $P \rightarrow T(P)$ che definisce la *temperatura*.
- (d) Una funzione $P \rightarrow s(P)$ che definisce la *densità di entropia* (per unità di massa).
- (e) Una funzione $P \rightarrow \underline{\delta}(P)$ che definisce lo *spostamento* rispetto ad una configurazione di riferimento.
- (f) Una funzione $P \rightarrow \underline{u}(P)$ che definisce la *velocità*.
- (g) Una *equazione di stato* che lega $T(P), s(P), \rho(P)$.
- (h) Un *tensore degli sforzi* $\underline{\tau}$, denotato anche (τ_{ij}) , fornisce la forza per unità di superficie che la parte di continuo posta a contatto con un elemento di superficie $d\sigma$ di normale \underline{n} dalla parte di \underline{n} esercita sulla parte di continuo a contatto con $d\sigma$ dalla parte opposta a \underline{n} , via la formula:

$$1.1 \quad d\underline{f} = \underline{\tau} \underline{n} d\sigma \quad (\underline{\tau} \underline{n})_i = \sum_{j=1}^d \tau_{ij} n_j \quad (1.1)$$

- (i) Un *tensore di conducibilità termica* $\underline{\kappa}$, che fornisce la quantità di calore che attraversa nella direzione \underline{n} l' elemento di superficie $d\sigma$ di normale \underline{n} nell' unità di tempo via la formula:

$$1.2 \quad dQ = -\underline{\kappa} \underline{n} \underline{\partial} T d\sigma \quad (1.2)$$

- (l) Una *densità di forza di volume* $P \rightarrow \underline{g}(P)$.
- (m) Una relazione che permette di esprimere i tensori degli sforzi e della conducibilità in funzione delle grandezze $\underline{\delta}, \underline{u}, \rho, T, s$.

Le relazioni in (g), (m) si chiamano *relazioni costitutive* del continuo: in una teoria microscopica dei continui devono essere deducibili, in linea di principio, dal modello atomico. Ma nel contesto in cui di solito ci porremo le equazioni costitutive hanno carattere puramente macroscopico e quindi fenomenologico e vanno pensate come parte integrante del modello.

Più in generale si possono considerare fluidi non omogenei, a più componenti chimiche fra le quali possono anche avvenire reazioni chimiche: qui non ci occuperemo di questi sistemi, anche se i fondamenti della loro teoria sono discussi in qualche dettaglio nei problemi alla fine del §1 (c.f.r. problemi [7],[17]).

I continui si dividono in solidi e liquidi. Sono liquidi se la relazione costitutiva permette di esprimere τ in termini delle sole grandezze termodinamiche e, inoltre, della \underline{u} : in altre parole se τ è indipendente dal campo di spostamento $\underline{\delta}$.

Si suppone sempre che *valgano i principi della dinamica e termodinamica*: cioè si suppongono valide un certo numero di relazioni fra le grandezze che descrivono il continuo.

Una notazione assai usata nel seguito sarà $\underline{\tau}$ per denotare un tensore τ_{ij} , $i, j = 1, \dots, d$; e poi $\underline{\tau} \underline{u}$ per denotare il risultato dell'azione del tensore $\underline{\tau}$ sul vettore \underline{u} , ossia il vettore la cui i -ma componente è $\sum_j \tau_{ij} u_j$. Si adotterà spesso anche la *convenzione di somma sugli indici ripetuti*: ossia, ad esempio, $\sum_{j=1}^3 \tau_{ij} n_j$ si denoterà (quando non si ingeneri confusione) anche semplicemente $\tau_{ij} n_j$.

In tal modo le relazioni fra le grandezze che descrivono il continuo sono le seguenti.

(I) *Conservazione della massa.*

Se Δ è un volumetto che nel tempo t evolve in Δ_t si deve avere:

$$1.3 \quad \int_{\Delta} \rho(P, 0) dP \equiv \int_{\Delta_t} \rho(P, t) dP \quad (1.3)$$

Scegliendo t infinitesimo si vede che la regione Δ_t è costituita dai punti che possono essere scritti:

$$1.4 \quad P' = P + \underline{u}(P)t, \quad P \in \Delta \quad (1.4)$$

e questa relazione può essere pensata come una trasformazione di coordinate $P \rightarrow P'$ che ha determinante jacobiano:

$$1.5 \quad \det \frac{\partial P'_i}{\partial P_j} = \det \left(1 + \frac{\partial u_i}{\partial P_j} t \right) = 1 + t \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial P_i} + 0(t^2) \quad (1.5)$$

per cui:

$$1.6 \quad \begin{aligned} \int_{\Delta_t} \rho(P', t) dP' &= \int_{\Delta} \rho(P + \underline{u}t, t) (1 + t \underline{\partial} \cdot \underline{u}) dP = \\ &= \int_{\Delta} \rho(P) dP + t \int_{\Delta} (\underline{\partial} \rho \cdot \underline{u} + \partial_t \rho + \rho \underline{\partial} \cdot \underline{u}) dP \end{aligned} \quad (1.6)$$

e pertanto si trova, da (1.3):

$$1.7 \quad \partial_t \rho + \underline{\partial} \cdot (\underline{u} \rho) = 0 \quad (1.7)$$

che è l'equazione di continuità.

(II) *Conservazione della quantità di moto (I^a equazione cardinale)*

$$1.8 \quad \frac{d}{dt} \int_{\Delta} \rho \underline{u} dP = \int_{\Delta} \rho \underline{g} dP + \int_{\partial \Delta} \underline{\tau} \underline{n} d\sigma \quad (1.8)$$

Per valutare la derivata si osserva che al tempo ϑ :

$$1.9 \quad \int_{\Delta_\vartheta} \underline{u} \rho(P', \vartheta) dP' = \int_{\Delta} \rho(P + \underline{u}(P)\vartheta, \vartheta) (1 + \vartheta \underline{\partial} \cdot \underline{u}) \underline{u}(P + \underline{u}(P)\vartheta, \vartheta) dP$$

$$\int_{\partial\Delta} (\underline{\tau} \underline{n})_i d\sigma = \int_{\Delta} \sum_j (\partial_j \tau_{ij}) dP \quad (1.9)$$

e dunque:

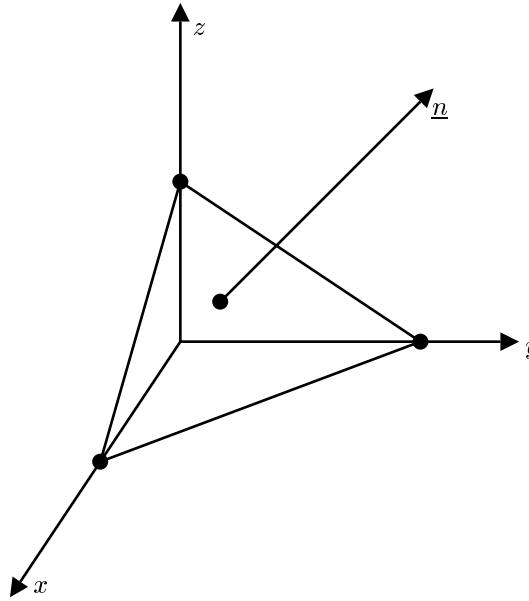
$$1.10 \quad \partial_t(\rho u_i) + \sum_j \partial_j(u_j(\rho u_i)) = \rho g_i + \sum_{j=1}^3 \partial_j \tau_{ij} \quad (1.10)$$

ossia usando (1.7) e usando la convenzione che indici ripetuti denotano somma su di essi:

$$1.11 \quad \dot{u}_j + \underline{u} \cdot \underline{\partial} u_j = g_j + \frac{1}{\rho} \partial_k \tau_{jk} \quad (1.11)$$

(III) Conservazione del momento della quantità di moto

Questa è una proprietà verificata automaticamente in base alla definizione di tensore degli sforzi, (1.1): se si permettesse una legge di sforzo più generale $\underline{\tau}_i(\underline{n})d\sigma$, invece che $\tau_{ij}n_jd\sigma$ con $\underline{\tau}$ simmetrico, si vedrebbe che essa impone che $\tau(\underline{n})_i d\sigma$ deve necessariamente avere la forma $\tau_{ij}n_j d\sigma$, e che $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Invero sia Δ un insieme avente la forma di un tetraedro con tre spigoli sugli assi coordinati e una faccia con normale \underline{n} . Siano $\underline{\tau}_1, \underline{\tau}_2, \underline{\tau}_3$ e $\underline{\tau}_n$ gli sforzi che si esercitano sulle quattro facce.



Il momento della quantità di moto di Δ è $\underline{K} = \int_{\Delta} (P - P_0) \wedge \rho \underline{u} dP \leq 0(\ell^4)$, se ℓ è il diametro di Δ ; pure di $0(\ell^4)$ è il momento delle forze di volume.

Il momento delle tensioni è invece a priori di $0(\ell^3)$: e quindi perché sia invece di $0(\ell^4)$ è necessario che ci sia una relazione fra $\underline{\tau}_1, \underline{\tau}_2, \underline{\tau}_3$ e $\underline{\tau}_n$. Per trovarla si osservi che se la risultante delle forze di tensione non fosse nulla all'ordine dominante, ossia:

$$1.12 \quad \underline{0} \neq \underline{\tau}(\underline{n})d\sigma - (\underline{\tau}_1 d\sigma_1 + \underline{\tau}_2 d\sigma_2 + \underline{\tau}_3 d\sigma_3) \equiv (\underline{\tau}(\underline{n}) - \underline{\tau}_1 n_1 - \underline{\tau}_2 n_2 - \underline{\tau}_3 n_3) d\sigma \quad (1.12)$$

allora la risultante sarebbe $\underline{c}d\sigma, \underline{c} \neq 0$, e quindi il momento risultante sarebbe $0(\ell^3)$ rispetto a qualche punto P_0 di Δ . Dunque

$$1.13 \quad \tau(\underline{n})_j = \tau_{ji} n_i \quad (1.13)$$

[Si può anche dire che questa relazione segue dalla 1^a equazione cardinale: invero se $\underline{c}d\sigma \neq \underline{0}$ la risultante delle forze sarebbe $0(\ell^2)$ mentre la derivata della quantità di moto è $0(\ell^3)$].

Inoltre $\tau_{ji} = \tau_{ij}$ come si vede osservando che, all'ordine più basso in ℓ , il momento delle tensioni sulle facce di un cubetto di lato ℓ , rispetto al centro è:

$$1.14 \quad \ell^3 [(j \wedge (\underline{\tau} j)) + i \wedge (\underline{\tau} i) + k \wedge (\underline{\tau} k)] \quad (1.14)$$

Se $(\underline{\tau} j)_i = (\tau_2)_i, (\underline{\tau} i)_i = \tau_{1i}, (\underline{\tau} u)_i = \tau_{3i}$ sono le componenti delle tensioni sulle facce di normale j, i, k rispettivamente, e se si impone che la (1.14) sia nulla (divisa per ℓ^3 e nel limite $\ell \rightarrow 0$), si trova:

$$1.15 \quad 0 = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \\ = i(\tau_{23} - \tau_{32}) + j(\tau_{13} - \tau_{31}) + k(\tau_{21} - \tau_{12}) \quad (1.15)$$

si trova $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ (teorema di Cauchy).

(IV) Conservazione dell' energia

Questa è una legge di conservazione più delicata in quanto coinvolge anche le proprietà termodinamiche del corpo.

Si immagina che ogni elemento Δ di fluido sia un sistema in equilibrio termodinamico e quindi dotato di funzioni di stato energia interna, entropia, temperatura *etc.*

La equazione di stato, caratteristica del continuo, sarà una relazione che esprime l' energia interna ε per unità di massa in termini della densità di massa ρ e della entropia per unità di massa s : $(\rho, s) \rightarrow \varepsilon(\rho, s)$.

Allora il bilancio energetico in un elemento di volume Δ sarà ottenuto esprimendo la variazione (per unità di tempo) dell' energia (cinetica e interna):

$$1.16 \quad \frac{d}{dt} \int_{\Delta} (\rho \frac{u^2}{2} + \rho \varepsilon) dP \quad (1.16)$$

come somma del lavoro eseguito dalle forze di volume, di quello degli sforzi al bordo e infine del calore che penetra per conduzione dai bordi di Δ . Questa è la somma dei seguenti addendi:

$$\begin{aligned}
 1.17 \quad & \int_{\Delta} \rho \underline{g} \cdot \underline{u} dP + \int_{\partial\Delta} \underline{\tau} \underline{n} \underline{u} d\sigma + \int_{\partial\Delta} \kappa_{ij} (\partial_i T) \cdot n_j = \\
 & = \int_{\Delta} \rho \underline{g} \cdot \underline{u} dP + \int_{\Delta} \partial_i (\tau'_{ij} u_j) dP - \int_{\Delta} \underline{\partial} \cdot (p \underline{u}) dP + \int_{\Delta} \partial_i (\kappa_{ij} \partial_j T) dP
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

ove si è scritto $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau'_{ij}$ ove p è la pressione e si è supposta valida la legge di Fourier (1.2) per la trasmissione del calore.

Uguagliando le (1.16), (1.17) ed usando la (1.11) (moltiplicata membro a membro per \underline{u} ed integrata su Δ) per eliminare il termine con l'energia cinetica si trova:

$$1.18 \quad \frac{d}{dt} \int_{\Delta} \rho \varepsilon dP = \int_{\Delta} [\underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \underline{u} + \underline{\partial} \cdot (\underline{\kappa} \underline{\partial} T) - p \underline{\partial} \cdot \underline{u}] dP \tag{1.18}$$

e in questa relazione si riconosce che l'ultimo termine a destra è $-p \frac{d|\Delta|}{dt}$ ossia il lavoro compiuto per unità di tempo dalle forze di pressione, mentre il penultimo termine dá la quantità di calore che penetra per conduzione nell'elemento di volume. Il membro di sinistra invece è la variazione per unità di tempo della energia interna. Quindi dal primo principio $dE = dQ - pdV$ vediamo che il primo termine di destra *deve* rappresentare una quantità di calore che entra nell'elemento di volume. Viene interpretata naturalmente come la quantità di calore che viene generata dall'attrito descritto dal tensore $\underline{\tau}'$.

Si noti che $\underline{\tau}'$ non solo contribuisce al bilancio energetico attraverso il calore generato per attrito $\underline{\tau}' \underline{\partial} \underline{u}$ per unità di volume, ma anche per il lavoro meccanico $(\underline{\partial} \underline{\tau}') \underline{u}$ per unità di volume: tali contributi appaiono invero sommati nella (1.17) (nella forma $\underline{\partial}(\underline{\tau}' \underline{u}) = \underline{\tau}' \underline{\partial} \underline{u} + \underline{u} \underline{\partial} \underline{\tau}'$).

Questo dunque conduce ad interpretare $\underline{\tau}'$ come una grandezza associata alle forze di attrito all'interno del fluido, oltre che agli sforzi non normali del fluido.

Perché questa interpretazione sia possibile occorre, naturalmente, che τ'_{ij} dipenda esclusivamente dalle grandezze termodinamiche locali (s, T) e dal gradiente (e eventualmente dalle derivate superiori) della velocità e, inoltre, si annulli con esso. Così dunque supporremo sempre nel seguito $\tau'_{ij} = 0$ se $\underline{\partial} \underline{u} = 0$.

La forma differenziale della (1.18) è:

$$1.19 \quad \partial_t (\rho \varepsilon) + \underline{\partial} \cdot (\rho \varepsilon \underline{u}) \equiv \rho (\partial_t \varepsilon + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \varepsilon) = \underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \underline{u} + \underline{\partial} \cdot (\underline{\kappa} \underline{\partial} T) - p \underline{\partial} \cdot \underline{u} \tag{1.19}$$

avendo usato (nella prima identità), l' equazione di continuità.

(V) *II° principio e bilancio dell' entropia*

La (1.19), combinata con il secondo principio della termodinamica $T dS = dE + p d|\Delta|$, e $S = \rho|\Delta|s$, $E = \rho|\Delta|\varepsilon$ e $\frac{d|\Delta|}{dt} = \underline{\partial} \cdot \underline{u}|\Delta|$, può essere riscritta come:

$$1.20 \quad T \rho (\partial_t s + \underline{u} \cdot \underline{\partial} s) = \underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \underline{u} + \underline{\partial}(\underline{\kappa} \underline{\partial} T) \quad (1.20)$$

che è la forma in cui, nelle applicazioni, spesso viene usata la conservazione dell' energia.

Se si introduce la *corrente di calore* $\underline{J}_q = -\underline{\kappa} \underline{\partial} T$ la (1.19) può essere riscritta anche nella forma:

$$1.21 \quad \rho \frac{ds}{dt} = -\underline{\partial} \cdot \frac{\underline{J}_q}{T} - \underline{J}_q \cdot \frac{\underline{\partial} T}{T^2} + \underline{\tau}' \cdot T \cdot \frac{1}{T} \underline{\partial} \underline{u} = -\underline{\partial} \cdot \frac{\underline{J}_q}{T} + \sigma \quad (1.21)$$

ove σ si interpreta come *densità di entropia generata per unità di volume e di tempo*. La σ viene anche scritta come:

$$1.22 \quad \sigma = \sum_j J_j X_j \quad (1.22)$$

ove X_j è un vettore a dodici componenti costituite dalle $-\frac{1}{T^2} \partial_i T$, $\frac{1}{T} \partial_i u_j$ e J_j è costituito dalle J_{qj} , $\underline{\tau}'_{ij}$.

Osservazione: In generale le forze termodinamiche X_j si identificano con parametri che misurano la lontananza dall' equilibrio macroscopico dello stato locale del fluido (come un gradiente di temperatura o di velocità); e le corrispondenti correnti si identificano con i coefficienti J_j che permettono di esprimere il tasso di creazione di entropia come combinazione lineare delle forze X_j , *c.f.r.* (1.22). È chiaro che l' identificazione (o "dualità") fra le forze termodinamiche e le correnti termodinamiche non è priva di ambiguità e in ogni problema, dato il tasso di creazione di entropia σ , si può in generale rappresentare σ in vari modi nella forma (1.22). Questa ambiguità è analoga a quella dell' identificazione delle coordinate canoniche in meccanica a partire da una data lagrangiana: si ottengono coordinate diverse a secondo di quali siano le variabili da cui si pensa che dipenda la lagrangiana. Il problema sta nel fatto che una nozione vermente precisa e puramente macroscopica di tasso di creazione di entropia *non* è, a tutt' oggi, ben stabilita in sistemi in non equilibrio, eccetto forse che per sistemi molto vicini all' equilibrio. Ma non è questa la sede per entrare in una discussione sui principi della termodinamica del non equilibrio.

Un' ipotesi fondamentale che viene spesso ammessa nella dinamica dei continui è che la relazione fra le *forze termodinamiche* X_j e le *correnti* o *flussi* J_j sia *lineare*, a parametri di stato locali ρ, p, T fissati:

$$1.23 \quad J_j = \sum_k L_{jk} X_k \quad (1.23)$$

almeno se le forze termodinamiche sono “piccole”. Questa relazione viene combinata con le proprietà di invarianza per trasformazioni di Galilei e eventuali altre simmetrie (presenti in fluidi a più componenti e/o chimicamente attivi) e con due principi della termodinamica dei processi irreversibili: le *relazioni di Onsager* e il *principio di Curie* per ottenere importanti restrizioni sui tensori $\underline{\kappa}, \underline{\tau}'$.

Le relazioni di Onsager dicono che la matrice L è simmetrica:

$$1.24 \quad L_{jk} = L_{kj} \quad (1.24)$$

mentre il principio di Curie dice che alcuni fra i coefficienti L_{jk} sono nulli. Se $L_{jk} = 0$ si dice che la corrente J_j *non dipende direttamente dalla* (o *non si accoppia direttamente con la*) forza termodinamica X_k . E il principio di Curie è precisamente che le correnti J_j che hanno carattere vettoriale (ossia sono le componenti di una quantità che si trasforma come un vettore per trasformazioni di Galilei come la \underline{J}_q) non dipendono da forze termodinamiche con diverse proprietà di trasformazione (quali le $\partial_i u_j$ che hanno carattere tensoriale), e più in generale non c'è accoppiamento fra forze termodinamiche e correnti termodinamiche che hanno diverse proprietà di simmetria rispetto a gruppi di simmetria del continuo considerato.

Ad esempio κ_{ij} deve essere una matrice simmetrica e inoltre τ'_{ij} deve essere, oltre che simmetrica (che già segue dalla seconda equazione cardinale), esprimibile in termini delle derivate $\partial_i u_j$ tramite una combinazione di $\partial_i u_j + \partial_j u_i$ e $\delta_{ij} \partial_k u_k$ perchè questi sono gli unici tensori che si possono formare in modo da dipendere linearmente dalle $\partial_i u_j$:

$$1.25 \quad \kappa_{ij} = \kappa_{ji}, \quad \tau'_{ij} = \eta (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \eta' \partial_k u_k \delta_{ij} \quad (1.25)$$

si veda (2.6), (4.38).

Le relazioni di Onsager sono una conseguenza macroscopica della reversibilità microscopica della dinamica, c.f.r. [DGM] e il principio di Curie pure trova le sue radici nella simmetria delle equazioni microscopiche, [DGM].

Il secondo principio della termodinamica si impone (non senza qualche difficoltà concettuale che non è qui il momento di discutere, c.f.r. problema (17)) richiedendo che $\sigma \geq 0$. Questo si impone richiedendo che il tensore $\underline{\kappa}$ sia definito positivo e che $\underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \underline{u} \geq 0$ ossia $\eta, \eta' + 2\eta \geq 0$.

Problemi

[1]: Sia $X(\underline{x}, t)$ una generica grandezza e si definisca una *linea di corrente* come una soluzione $t \rightarrow \underline{x}(t)$ dell'equazione:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{u}(\underline{x}, t)$$

ove $\underline{u}(\underline{x}, t)$ è un dato campo di velocità. La *derivata sostanziale* di X è allora definita dalla derivata rispetto a t di $X(\underline{x}(t), t)$ e si scrive:

$$\frac{d}{dt} X(\underline{x}(t), t) = \partial_t X + \underline{u} \cdot \underline{\partial} X$$

Si dimostri che:

$$\rho \frac{d}{dt} X = \partial_t(\rho X) + \underline{\partial}(\rho X \underline{u})$$

(Idea: si usi l'equazione di continuità per ρ).

[2]: Si constati che l'equazione di continuità si può leggere dicendo che la derivata sostanziale di ρ è $-\rho \underline{\partial} \cdot \underline{u}$.

[3]: Si consideri un gas rarefatto monoatomico con atomi di massa m e raggio σ , che occupa il semispazio $z > 0$. Si immagini che il fluido sia dotato di un moto isoterma stratificato con velocità $v(z) = z v'$ nella direzione x . Sia ρ_n la densità numerica (numero di atomi per unità di volume), λ è il cammino libero medio e $\bar{v} = (3kT/m)^{1/2}$ è la velocità media di agitazione termica (ove k è la costante di Boltzmann e T è la temperatura). Si trovi un argomento che giustifichi euristicamente, e trascurando le componenti orizzontali delle velocità, l'affermazione che il numero di particelle che attraversa la superficie ideale di quota $z_0 \gg \lambda$ provenendo da quote $z > z_0$ e senza subire collisioni è, nel tempo $\tau = \lambda/\bar{v}$:

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} dz \int_{-w_z \tau > \lambda} \rho_n dx dy f(\underline{w}) d\underline{w}$$

se $f(\underline{w}) = e^{-\frac{m w^2}{2kT}} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$ è la distribuzione di Maxwell.

[4]: Nel contesto del problema [3] si deduca che le variazioni dell'impulso e dell'energia cinetica di agitazione termica contenuti nello strato di gas a quota $z \leq z_0$ per unità di tempo e di superficie sono rispettivamente:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\lambda dh \int_{\lambda/\tau}^\infty \rho_n dw \frac{e^{-\frac{m w^2}{2kT}}}{(2\pi kT/m)^{1/2}} (2m h v'),$$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\lambda dh \int_{\lambda/\tau}^\infty \rho_n dw \frac{e^{-\frac{m w^2}{2kT}}}{(2\pi kT/m)^{1/2}} \left(2 \frac{3}{2} k h \frac{dT}{dz}\right)$$

Dedurre da questo che la forza per unità di superficie esercitata dal fluido al di sopra della quota z_0 sulla parte al di sotto di z_0 è $F = \bar{\eta} v'$ con:

$$\bar{\eta} = m \bar{v} \rho_n \lambda \gamma, \quad \gamma = \int_{\sqrt{3}}^\infty e^{-p^2/2} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}}$$

Dedurre anche che la quantità di calore per unità di tempo che attraversa la superficie a quota z_0 è $Q = \kappa \frac{dT}{dz}$ con:

$$\kappa = \frac{3}{2} k \bar{v} \rho_n \lambda \gamma$$

Si dimostri che $\eta = m \frac{\gamma}{\pi \sigma^2} \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. (Idea: si usi la formula (definizione) $\lambda \pi \sigma^2 \rho_n = 1$ per il libero cammino medio in termini del diametro σ degli atomi).

[5]: Nel contesto dei problemi [3,4] si supponga che il tensore degli sforzi del gas sia $\tau'_{ij} = \eta(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ con η costante: si calcoli la forza per unità di superficie che la parte di gas a quota $\geq z_0$ esercita sulla parte di gas a quota inferiore e si deduca che $\eta = \bar{\eta}$; e che quindi vale la *relazione di Clausius Maxwell* fra viscosità, conducibilità termica e calore specifico a volume costante per unità di massa $c_v \equiv \frac{3}{2} R M_A^{-1}$ (ove R è la costante dei gas e M_A è la "massa atomica", (e.g. 4g per l'elio)):

$$\kappa = c_v \eta$$

e si deduca la indipendenza della viscosità η e della conducibilità κ dalla densità e la loro proporzionalità a \sqrt{T} . Si controlli che perfezionando i calcoli in vari modi, ad esempio non trascurando le componenti orizzontali delle velocità, si alterano i risultati solo per fattori numerici indipendenti dalle grandezze fisiche m, ρ, T , e in particolare, la relazione di Clausius Maxwell resta la medesima (nei gas rarefatti).

[6]: Si mostri che in un fluido perfetto ($\tau', \kappa, g = 0$, c.f.r. (1.17)):

$$\partial_t \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) dP = - \int_V \rho \underline{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) dP = \int_{\partial V} \rho \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \underline{v} \cdot \underline{n} d\sigma$$

ove $w = \varepsilon + p/\rho$. E quindi $\rho \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \underline{v}$ può essere interpretato come *flusso di energia*. (*Idea*: se $d\sigma$ è un elemento di superficie con normale \underline{n} la quantità di energia che passa per $d\sigma$ nella direzione \underline{n} è $\rho \left(-\frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) \underline{v} \cdot \underline{n} d\sigma - p \underline{v} \cdot \underline{n} d\sigma$ perchè la prima è la quantità di energia che "esce" attraverso $d\sigma$ per unità di tempo e la seconda è il lavoro che viene effettuato dalla parte di fluido opposta a \underline{n} , per unità di tempo.)

[7] Si supponga che un fluido sia costituito da una miscela di n diversi fluidi. Siano ρ_1, \dots, ρ_n le densità e $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ le velocità rispettive. Allora $\rho = \sum_j \rho_j$ è la "densità totale" e $\underline{u} = \rho^{-1} \sum_j \rho_j \underline{u}_j$ è il "campo di velocità" del fluido. Si faccia vedere che le equazioni di continuità possono scriversi nella forma:

$$\partial_t \rho_k = -\underline{\partial} \cdot (\rho_k \underline{u}_k), \quad \partial_t \rho = -\underline{\partial} \cdot (\rho \underline{u})$$

Porremo $\underline{J} = \rho \underline{u}$ and $\underline{J}_k = \rho_k (\underline{u}_k - \underline{u})$: si verifichi che se $\frac{d}{dt} \stackrel{def}{=} \partial_t + \underline{u} \cdot \underline{\partial}$ allora:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\rho_k \underline{\partial} \cdot \underline{u} - \underline{\partial} \cdot \underline{J}_k$$

[8] Nel contesto del problema [7], si supponga che fra le n specie di fluido siano possibili r reazioni chimiche e che, altrimenti, le interazioni fra le particelle siano modellate da cuori duri così che l' energia interna è interamente cinetica. Se l' equazione chimica della r -ma reazione chimica si scrive $\sum_{k=1}^n n_{kj} [k] = 0$, ove n_{jk} sono interi stechiometrici (ad esempio $2[H_2] + [O_2] - 2[H_2O] = 0$ coinvolge tre specie H_2 , O_2 , and H_2O di masse molecolari 2, 16, 18 rispettivamente), si definiscono i *coefficienti stechiometrici* della reazione j le quantità $\nu_{jk} = m_k n_{jk}$ se m_k è la massa molecolare della specie k . Allora: $\sum_{k=1}^n \nu_{jk} = 0$, per la conservazione della massa (*legge di Lavoisier*), $\sum_k \nu_{jk} \underline{u}_k = \underline{0}$ per la conservazione dell' impulso e $\sum_k \nu_{jk} \frac{1}{2} \underline{u}_k^2 = \eta_j$ per la conservazione dell' energia se η_j è l' energia liberata nella j -ma reazione. Sia R_j il numero di reazioni chimiche di tipo j che hanno luogo per unità di volume e di tempo (un numero che può avere entrambi i segni: $R_j > 0$ significa che la reazione procede nella direzione che trasforma molecole con coefficienti stechiometrici negativi in molecole con coefficienti stechiometrici positivi e viceversa per $R_j < 0$). Si faccia vedere che le equazioni di continuità vengono modificate in:

$$\partial_t \rho_k = -\underline{\partial} \cdot (\rho_k \underline{u}_k) + \sum_{j=1}^r R_j \nu_{jk}, \quad \partial_t \rho = -\underline{\partial} \cdot (\rho \underline{u})$$

Inoltre, con le notazioni di [7]:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\rho_k \underline{\partial} \cdot \underline{u} - \underline{\partial} \cdot \underline{J}_k + \sum_{j=1}^r R_j \nu_{jk}, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \underline{\partial} \cdot \underline{u}$$

Infine, posto $c_k = \rho_k/\rho$, si ha:

$$\rho \frac{dc_k}{dt} = -\underline{\partial} \cdot \underline{J}_k + \sum_{j=1}^r R_j \nu_{jk}$$

[9] Nei modelli di fluido a più componenti chimicamente attive si verifichi che l'equazione corrispondente alla I^a equazione cardinale (conservazione dell' impulso) è:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\underline{\partial} p + \underline{\partial} \underline{\tau}' + \sum_{k=1}^n \rho_k \underline{g}_k$$

ove p è la somma delle pressioni parziali p_k di ciascuna specie, $\underline{\tau}'$ è la somma degli sforzi $\underline{\tau}'_k$ su ciascuna specie più il tensore $\sum_k \underline{u}_k \underline{J}_k$, e $\underline{g}_k = -\underline{\partial} V_k$ è la forza, con energia potenziale per unità di massa V_k , agente sull' specie k -ma (che potrebbe dipendere dalla specie: si pensi, ad esempio, ad una soluzione ionizzata in un campo elettrico) purchè l' energia potenziale totale non cambi nelle reazioni chimiche (cioè $\sum_k \nu_{jk} V_k = 0$). (*Idea*: Si scriva la I -th equazione cardinale per ciascuna specie k :

$$\partial_t(\rho_k \underline{u}_k) + \underline{\partial} \cdot (\rho_k \underline{u}_k \underline{u}_k) = -\underline{\partial} p_k + \underline{\partial} \underline{\tau}'_k + \rho_k \underline{g}_k + \sum_j R_j \nu_{jk} \underline{u}_k$$

e si sommi su k considerando la conservazione dell' impulso in [1.1.8].)

[10] Nel contesto di [8], [9] si chiami $\underline{J}_k = (\underline{u}_k - \underline{u}) \rho_k$ la *corrente di diffusione* della k -ma specie, c.f.r. [1.1.7], e si verifichi che l' equazione di conservazione dell' energia è

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \underline{\partial} \cdot \underline{u} + \underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \underline{u} + \sum_k \underline{g}_k \cdot \underline{J}_k - \underline{\partial} \cdot \underline{J}_q$$

ove $\rho \varepsilon \stackrel{def}{=} \sum_k \rho_k (\varepsilon_k + \frac{1}{2} (\underline{u}_k - \underline{u})^2)$ and \underline{J}_q è opportunamente definito. (*Idea*: L' energia in un elemento di volume Δ dovuta alla k -ma specie è $\int_{\Delta} \rho_k (\varepsilon_k + \frac{1}{2} \underline{u}_k^2) d\mathbf{x}$ se ε_k è l'energia interna per particella. Supponiamo che non ci sia interazione fra le specie altra che quella che da luogo alle reazioni chimiche e agli urti elastici fra le sfere dure che modellano le particelle. Allora, posto $\vartheta_k \stackrel{def}{=} (\varepsilon_k + \frac{1}{2} \underline{u}_k^2)$, il bilancio dell' energia per la k -ma specie da

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_k \vartheta_k) + \underline{\partial} \cdot (\rho_k \vartheta_k \underline{u}_k) &= -\underline{\partial} \cdot (p_k \underline{u}_k) + \underline{\partial} \cdot (\underline{\tau}'_k \underline{u}_k) + \\ &+ \rho_k \underline{g}_k \cdot \underline{u}_k + \underline{\partial} \cdot (\underline{\kappa}_k \cdot \underline{\partial} T) + \delta_k \end{aligned}$$

ove $\underline{\kappa}_k \cdot \underline{\partial} T$ è il flusso di calore nella specie k -ma e δ_k è la variazione totale dell'energia

della specie k dovuta alle reazioni chimiche, $\delta_k = \sum_j \nu_{jk} (\eta_{jk} + \frac{1}{2} \underline{u}_k^2)$, con η_{jk} uguale alla energia di dissociazione della k -ma specie nelle componenti coinvolte nella j -ma reazione, in modo che $\sum_k \delta_k = 0$. Aggiungendo e sottraendo \underline{u} ove conveniente e sommando su k si trova

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \varepsilon + \rho \frac{1}{2} \underline{u}^2) + \underline{\partial} \cdot (\sum_k \rho_k (\varepsilon_k + \frac{1}{2} \underline{u}_k^2) (\underline{u}_k - \underline{u}) + \rho \varepsilon + \rho \frac{1}{2} \underline{u}^2) &= \\ = -\underline{\partial} \cdot (p \underline{u}) - \underline{\partial} \cdot (\sum_k p_k (\underline{u}_k - \underline{u})) + \underline{\partial} \cdot (\sum_k \underline{\tau}'_k (\underline{u}_k - \underline{u})) + \underline{\partial} \cdot (\underline{\tau}' \underline{u}) &+ \\ + \sum_k \rho_k \underline{g}_k \cdot (\underline{u}_k - \underline{u}) + (\sum_k \rho_k \underline{g}_k) \cdot \underline{u} + \underline{\partial} \cdot (\underline{\kappa} \cdot \underline{\partial} T) & \end{aligned}$$